高级微观经济学 I

Based on lectures by Wu Qi(GSM)

Wang Bencheng

Department of Applied Economics, GSM

2024 年 1 月 24 日

“我们企盼这所校园能哺育出这样一群学子：现实者不功利，理想者不空谈，仁爱者不软弱，刚直者不偏激；每个人都是尽责的公民，每个人都能坚守自己独立的人格，每个人都能为他人的幸福拓展纵深。”

目录

1 *Consumer Theory I: Model Preference*

本节我们讨论建立消费者行为理论的两种思路：

Preference-Based Approach：*rational preference*、*proof of the property of preference*、*Sen's* α、*Sen's* β *and HWARP (proof)*；给定理性偏好（规定 completeness 和 transitivity），可以生成基于偏好的选择结构 $C^*(B, \succsim)$。

Choice-Based Approach：*choice structure and property*、*WARP*；给定消费选择结构 $C(B)$，当选择满足 *WARP*（一致性）的情况下可以生成显示偏好 $\succsim^*$ （*revealed preference* 是不是理性的需要进行界定，当满足一定条件时可以生成理性偏好，即 $B = P(X)$）。

两种选择结构在满足一定情况下是等价的：消费结构满足 *WARP* 同时 $B = P(X)$，此时 *revealed preference* $\succsim^*$。从选择出发建立 *choice theory* 的好处是更加符合实际情况，*WARP* 规定了消费者选择的一致性（不需要诉诸于偏好假定）。

从偏好的角度出发可以建立传统的效用函数理论，更加抽象且预设了理性偏好的假定（首先规定 *rational* 偏好）。现实中更多的是从可观测的 *choice theory* 反推背后的偏好，也就是从可观测的 $x(p, w)$ 反推 $u(x)$ 的过程。

我们一般使用的框架：可观测的现实的 *Choice Rules*（不依赖任何假定且可观测）$\rightarrow_{WARP}$ 偏好（需要满足理性假定才能产生 *Choice Structure*）$\rightarrow$ 效用函数（依赖于更多假定才能生成现实的选择集，但是便于进行数理分析）。

Theorem：两种消费者偏好理论的等价性

1. $\succsim$ 是理性的，可以推出 $C^*(\cdot, \succsim)$ 满足 *HWARP*；

2. 如果 $B = P(X), (B, C(\cdot))$ 满足 WARP，可以推出 $\succsim^*$ 是理性的；

1.1 *Preference-Based Approach*

Some properties of preference（给定偏好关系 *binary relation* 的基本定义，进一步给定偏好关系的基本性质进行框定）

1. *Rational preference: Completeness and transitivity. (If you define some binary order, you have to verify whether the binary order satisfy the rational conditions.)*

2. $\succ$ *satisfies transitivity but not complete, so does* $\sim$*.*

3. 完备性的经济含义：任意两种选择都是可以进行比较的，消费者必然存在消费选择

4. 传递性的经济含义：传递性很大程度上规定了偏好的理性性质，即消费者必须保证偏好在不同选择中的一致性；如果消费者的消费习惯或品味改变会导致不满足传递性（例如行为经济中的设定）；传递性是理性偏好的关键假定

5. 任何偏好关系的界定都需要从完备性和传递性的角度进行证明

   - 界定 $\succ$ 和 $\sim$ 的性质时往往可以根据定义进行说明
   - 关于偏好性质的证明，反证法（*by contradiction*）推矛盾从而证明条件

1.1.1 *Partial order*

界定偏序关系（$\succ$）需要满足传递性而不满足完备性（即无法在所有选择中进行比较）

1. 对于任意 $x, y \in X$，如果 $x \succ y$，那么就不存在 $y \succ x$ 成立；如上就是界定了偏序关系，偏序关系不完备是因为无法在三种关系（弱偏好、无差异）中界定出来；反之 not $x \succ y$ 就是完备的;

2. *Partial order* 定义的是这种不具备完备性的序关系（例如 $x \succ y$ 以及 $x \succ z$，但是无法比较 y, z 的序关系）；

1.1.2 偏好关系生成选择结构

给定可行的选择集合 X, B 是 X 的非空子集，现在的任务是从偏好出发，给定任意的可行集合消费者都可以最优化的选择满足自身偏好的 *bundle*；

定义选择规则：$C^*(B, \succsim) = \{x \in B : x \succsim y, \forall y \in B\}$，即消费者在选择集 B 进行选择满足其自身偏好的 *bundle*（定义式是证明选择规则的基础，尤其是 *WARP*）

$x, y \in C^*(B, \succ)$ 等价于 $x \sim y$；$x \in C^*(B, \succ), y \notin C^*(B, \succ)$, 等价于 $x \succ y$；

$P(X)$ 是 X 的所有非空子集和，同时对于选择 $C^*(B, \succ) \neq \phi$，其经济含义在于消费者的选择集非空（必然进行选择，这也是完备性的基本要求）

最优选择 $C^*(B, \succ)$ 非空的证明：归纳方法（$N = 1$ 时根据完备性证明；$N = n + 1$ 时分离 $N = n$ 与元素 x）。有关 $C^*(B, \succ)$ 的证明都可以归纳到基本性质：一是定义；二是非空性质；三是理性偏好的传递性和完备性（尤其是传递性使用）

1.1.3 *Three Choice Pattern*

Sen's α：如果 $x \in B \subset A, x \in C^*(A, \succsim)$，那么必然有 $x \in C^*(B, \succ)$；比较显然，即在大集合中的最优选择也是小集合中的最优选择

- 证明：反证法（只需利用完备性，即所有的选择都是可比的）

Sen's β：如果 $x, y \in A \subset B; x, y \in C^*(A, \succsim)$，同时 $y \in C^*(B, \succsim)$, 那么我们有 $x \in C^*(B, \succsim)$；比较显然，即两个元素都是小集合中的选择（无差异），如果一个元素使大集合中的最优选择，那么另一个元素也是大集合中的最优选择

- 证明：$x \in C^*(A, \succsim) \to x \succsim y; y \in C^*(B, \succsim) \to y \succsim z \to x \succsim z$（传递性发挥作用：偏好需要满足传递性）

HWARP：如果 $x, y \in A \cap B; x \in C^*(A, \succsim), y \in C^*(B, \succsim)$，那么我们就有 $y \in C^*(A, \succsim), x \in C^*(B, \succsim)$；不是很显然需要画图理解，其经济含义在于：两个元素同属于交集空间，如果一个元素以一个选择集中的最优选择，那么另一个元素也是该选择集中的最优选择（两个元素属于交集）

- 证明（使用传递性）–完全依赖于传递性，证明思路和 *Sen's* β 的证明如出一辙

如果偏好理性的，那么选择规则 $C^*(B, \succ)$ 就一定满足上述三种 *choice pattern*[1]。掌握上述三种 *choice pattern* 的证明，其中 Sen's α 依赖于偏好的完备性；Sen's β 依赖于偏好的完备性和传递性（尤其是传递性），前者相较于后者偏弱（排序结构可能满足前者而不满足后者）。

1.1.4 *Preference -Based Approach* 的基本思路

首先界定理性偏好的基本性质，其次是界定选择规则（偏好生成选择规则），最后根据选择规则和偏好定义可以形成三种 *choice pattern*，这是经典的基于偏好关系建立 *choice theory* 的逻辑。

1.2 *Choice-Based Approach*

1.2.1 选择规则与选择结构

基本结构：给定现实中的选择界定选择结构—WARP 约束选择一致性—从选择结构生成显示偏好 revealed preference—显示偏好的理性条件

[1] 习题：可以证明偏好是否满足三种 *choice pattern*，尤其是偏序关系 *partial order*

给定**选择规则**：$C(B)=\{X\in B: x \text{ is chosen}\}$。定义选择结构 *choice structure*：给定非空子集 B，消费结构定义为 $(B,C(.)),C(B)\neq\phi$ （选择集也是非空集）。其经济含义是：消费者可以在任何非空子集中进行选择单个或者多个元素进行消费[2]。

1.2.2 *WARP* 选择一致性约束

类似于 HWARP 的结构，如果 $x,y\in B,x\in C(B);x,y\in B',y\in C(B')$，那么我们有 $x\in C(B'),y\in C(B)$；这保证了选择的一致性。

相关证明：满足 *WARP* 的证明，一般涉及两元素满足 *WARP*；不满足 *WARP* 的证明（一般涉及三个元素）：采用列举法一一进行反证说明。

显示偏好 *reveal preference*：从选择结构中生成显示偏好。$x\succsim^* y$ 当且仅当 $x,y\in B,x\in C(B)$（消费者选择了 x 说明 x 被显示偏好于 y）。

1.2.3 两种 *approach* 的联系

如果选择结构 $(B,C(\cdot))$ 满足 WARP 且 $B=P(X)$（所有的非空集合），那么存在显示偏好 $\succsim^*$ 使得 $C(B)=C^*(B,\succsim^*)$，其中 $\succsim^*$ 是唯一的（*unique*）.

Proof：需要证明显示偏好 $\succsim^*$ 理性化了选择结构，即证明 $\succsim^*$ 满足完备性（两个元素）和传递性（三个元素）

- 传递性证明：给定 $x\succsim^* y,y\succsim^* z$，证明 $x\in C(\{x,y,z\})$ （一一列举三元素的各种可能进行证明）
- 证明 $C(B)=C^*(B,\succsim^*)$，集合相等的证明需要证明前者是后者的子集，后者是前者的子集；子集的证明等价于 A 中的元素全部在 B 中，则 $A\subset B$.

经济含义：满足 *WARP* 说明满足选择的一致性，$B=P(X)$ 保证了传递性（三个元素的存在规定了选择关系进而规定了显示偏好的传递性），因而可以从选择结构中生成理性的 $\succsim^*$。

1.3 *Consumer Choice Based on Choice Approach*

1.3.1 消费者选择的基本结构

给定选择结构—*Walrasian Demand Function–WARP* 与需求规律（基于 *WARP*）–*Slutsky matrix*（NSD 性质）：

- 基于现实中的观测可以生成需求函数（*walras*），满足 *HOD 0*（一次齐次）与 *walras* 规则（$px(p,w)=w$）
- 满足 *WARP* 的条件下（满足 *WARP* 未必是理性偏好–可能不满足传递性）可以推导需求规律（$\Delta p\Delta x\leq 0$）
- 根据需求定律进一步推到 *Slutsky* 分解关系：$S(p,w)=\Delta_p x(p,w)+\Delta_w x(p,w)x(p,w)'\leq 0$,*Slutsky* 是负半定矩阵（NSD）
- 基于 *WARP* 的 *Slutsky* 矩阵是否满足对称性没有进行规定（对称性在效用函数中依赖于 $e(p,u)$ ）

给定消费选择 $X=R^L_+=\{x\in R^L_+: x_l\geq 0,l=1,...,L\}$，存在预算约束集 $B_{p,w}=\{x\in R^L_+: p\cdot x\leq w\}$

1. 在消费者行为理论中，预算约束集决定了可行的消费集（给定 $B_{p,w}$ 可以确定 *walras demand function* $x(p,w)$）

[2]这里是一般化的定义，并未施加任何意义上的约束

2. *Walras demand function*：映射函数关系，$x(p,w) \to x$ 的实质函数映射

3. 从消费者选择出发可以观测到在 (p,w) 下的消费选择，从而可以确定预算约束集以及消费函数 $x(p,w)$

1.3.2 *Walras Demand Function* 的基本性质

基本性质：*HOD 0*（0 次齐次函数–依赖于 $B_{p,w} = B_{\alpha p,\alpha w}$ 的性质）、*walras law*（非餍足性）、*Slutsky* 矩阵对称负半定，以上三个条件给出了（来自效用最大化的）需求函数的判定条件。

从 *choice-based approach* 建立消费者理论，需要满足 *WARP*、*HOD 0*、*walras law* 三个规律（不建立在偏好和效用的基础上，因而 *choice* 框架可以用于分析但是并不用于最优化计算）。

给定 *walras demand function* 可以进行**比较静态分析**

1. 收入拓展曲线（wealth expand path）：normal good（$\partial x_l/\partial w \geq 0$）以及 inferior good（$\partial x_l/\partial w \leq 0$）

2. 价格拓展曲线（price expand path）：regular good（$\partial x_l/\partial p \leq 0$）以及 giffen good （$\partial x_l/\partial p \geq 0$）

   - *Giffen Good*：负的收入效应完全抵消掉了替代效应（首先是 *inferior good*），没有替代品且占据了绝大部分的收入（收入效应足够大）

给定 *walras demand function* 的约束条件**确定微分关系**

1. *HOD 0* 的微分关系：$x(\alpha p,\alpha w) = x(p,w) \to D_p x(p,w)p + D_w x(p,w)w = 0$；

2. *Walras law* 的微分关系：$x(p,w)p = w \to D_p x(p,w)p + x(p,w) = 0; D_w x(p,w)p = 1 \to S(p,w)p = pS(p,w) = (D_p x(p,w) + D_w x(p,w)x(p,w)')p = 0$；

1.3.3 *WARP* 关系

1. 如果 $p \cdot x(p',w') \leq w, x(p,w) \neq x(p',w')$，那么有 $p' \cdot x(p,w) \geq w'$（表示 $x(p,w) \succsim^* x(p',w')$，在消费的起后者的时候选择了前者）

2. *WARP* 依旧是关于选择一致性的限定条件：图形判别、表格判别（判定各自的消费束进而判定是否消费的起）

***WARP* 推导 *compensated demand law* $\Delta p \Delta x \leq 0$**： *WARP* 推导补偿性的需求定律（保证原来的消费不改变，存在补偿性收入 $w' = p' \cdot x(p,w) \geq w, \Delta w = w' - w$）。

给定两个消费束：在 (p^a, w^a) 的情况下最优消费为 x^a；在 (p^b, w^b) 的情况下最优消费为 x^b，相应的：

- 如果违背 *WARP*，则有：$p^a x^b < w^a, p^b x^a < w^b$（两种情况下都消费的起）；

- 不违背 *WARP*，则有：$p^a x^b < w^a, p^b x^a > w^b$（$x^a$ 显示偏好于 x^b）；$p^a x^b > w^a, p^b x^a < w^b$（$x^b$ 显示偏好于 x^a）；$p^a x^b > w^a, p^b x^a > w^b$（无法判定是否满足 *WARP*，但是并未违背 *WARP*）；

- 满足 *WARP*，则有：$p^a x^b < w^a, p^b x^a > w^b$（$x^a$ 显示偏好于 x^b）；$p^a x^b > w^a, p^b x^a < w^b$（$x^b$ 显示偏好于 x^a）；

1.3.4 $\Delta p \Delta x \leq 0$ 推导 *Slutsky* 方程

1. *Slutsky Equation*：$\partial x(p,w)/\partial p + x(p,w)\partial x/\partial w \leq 0$（NSD 性质来自于需求定律和 *WARP*）

2. *Slutsky Matrix*：$S(p,w) = D_p x(p,w) + D_w x(p,w)x(p,w)'$，其中 $S_{lk} = \partial x_l(p,w)/\partial p_k + x_k(p,w)\partial x_l(p,w)/\partial w$

3. *WARP* 决定了 *Slutsky* 是负半定的 NSD（对角线元素即自替代效应非正）

4. 性质：$pS(p,w) = S(p,w)p = 0$，可以根据该性质推导矩阵 $S(p,w)$ 各项参数（尤其是二阶）

5. *WARP* 条件下并不保证 *Slutsky* 的对称性（实际上也无法保证偏好的理性：满足 *WARP* 的显示偏好未必满足传递性）

1.4 *Consumer Choice Based on Preference*

1. 基于 *Preference* 的 *choice theory* 关键在于建立 *Utility*，即给定 *Preference* 的基本性质推导 *Utility Function*，并解决 *UMP* 和 *EMP* 问题；

2. *Preference* 的性质：*rational*、*continuity*、*convex*、*local non-stationary (monotonously)* 推导 *utility function*；

3. *Utility Function* 的存在性，*preference* 的性质与 *Utility function* 性质的对应关系；

4. *Utility Function* 的基本性质、*UMP* 问题与 *EMP* 问题；

5. 最优化函数的基本性质（掌握证明：凹凸性等及其经济含义）；

本部分给出了消费者选择行为建模的两种手段：基于偏好的建模方式与基于选择的建模方式。现实中，基于选择的建模方式更加灵活，给定消费者现实中的选择，如果消费者的选择满足 *WARP*，即不同情况下的选择满足一致性，则可以导出理性的显示偏好。显示偏好的概念是基于消费者可观测选择行为建模的核心观念，当满足 *WARP* 时可以导出理性的显示偏好。基于偏好的建模方式从抽象的消费者偏好出发，给定理性偏好从而导出消费者的选择结构，一旦给定偏好的完备性与传递性，则所有的选择都是可以比较的，从而可以确定消费者在选择集中的选择。基于选择的结构根据选择结构反推背后理性的显示偏好，基于偏好的结构根据抽象的理性偏好生成理性的选择，两者是等价的建模方式。

2 *Consumer Theory II*: *Utility Theory*

2.1 *Utility function Setting*

Definition: $x \succsim y$ *if and only if* $u(x) \geq u(y)$，建立一种偏好关系到实数关系的实值函数（偏好的显示化）

效用函数不是唯一的，对于效用函数的任何单调增变化（*monotone transformation*）都表示相同的序数关系（建立在序数基础上的效用函数–*represent order relationship*）

定理：偏好关系与效用函数的对应关系表示为

偏好关系 $\succsim$ *可以被效用函数* u *表示，当且仅当* $\succsim$ *是理性的;*

只有理性的偏好才能被效用函数表示（必要条件），是不是所有理性的偏好都可以被效用函数表示呢？不是，字典序偏好 *lexicographic preference* 无法用效用函数表示，问题在于不满足连续性：字典序偏好非连续性不存在效用函数的证明：字典序偏好每个点就是一个无差异点，不存在无差异曲线，因而也就不存在一维实值函数表达二维关系。在此基础上，给出更为严格的偏好与效用函数关系**定理**：

理性偏好 $\succsim$ *是连续的时候，可以被效应函数* u *表示;*

2.1.1 关于 *preference* 的更多假定

1. **单调性（*monotonous*）或者局部非餍足性**（弱化约束）保证了不存在无差异区域（只存在无差异曲线）：局部非餍足性意味着消费者总可以在邻域内找到更好的选择;

2. **偏好的凸性（*convexity*）**：$\succsim$ 是凸的当且仅当其上水平集是凸的 $\alpha y + (1-\alpha)z \succsim x$, 其中 $y \succsim x, z \succsim x$, 凸性的经济学含义在于对于多样性的偏好（*mixture is better*），同样也意味着边际替代率 *MRS* 递减;

3. **连续性（*continuity*）**：保证了效用函数的存在性，偏好是连续的等价于上水平集和下水平集是闭的（无差异曲线是闭的，偏好连续）;

2.1.2 效用函数的存在性定理

理性偏好是连续的，那么存在连续函数 u 可以表示偏好 $\succsim$:

- *Rational+continuity+strict monotonicity+convexity* 的假定构成了常见的拟凹效用函数
- 位似偏好 *homothetic preference* –位似效用函数是一次齐次函数 *HOD 1*
- 拟线性偏好 *qusailinear preference* –拟线性效用函数 $u(x) = v(x) + y$

2.1.3 效用函数的基本性质

1. 如果偏好是凸的，那么效用函数就是拟凹的（凸偏好–上水平集为凸–效用函数为拟凹）
   - 拟凹的集合判定：上水平集为凸（下水平集为凸表示拟凸函数）
   - 函数定义：$u(tx + (1-t)y) \geq min(u(x), u(y))$，凹性的基本要求为大于最小值
   - 拟凹函数的判定：几何判定、函数判定、加边 *Hessian* 矩阵判定（负正交替出现）
   - 拟凹性质对于单调增变换保留原来的序数性质，例如 $y = ln(x)$ 的单调增变换
2. 凹函数假定（凸偏好只对应拟凹函数，凹函数–拟凹函数–凸偏好）
   - 凹函数的设定更加便于分析（$u'' \leq 0$ 以及 *Hessian* 矩阵 *NSD*）

2.2 *Utility Maximum Problem*

2.2.1 *UMP* 解的存在性与唯一性定理

效用最大化问题的基本形式：$max_x\ u(x); x \in B_{p,w}$。

如果效用函数连续（偏好理性且连续），存在 x^* 最优化 UMP（原因在于 $B_{p,w}$ 是紧集，u 必然存在最大值）；如果偏好是局部非餍足性的，则满足 *walras law* $p \cdot x^* = w$；如果满足严格凹性，则 x^* 是唯一的（*by contradiction*）。

关于 *UMP* 的解的问题：$B_{p,w}$ 是 *compact set* 决定 x^* 的存在性，但是其余的性质（唯一性、*walras law*）取决于 *utility function* 的性质，给定 *preference* 或者 *utility function* 的性质可以进一步明确 x^* 的性质。

Lagrange 优化条件（充分条件）与 KT 条件（有利于求解边界点问题）

1. KT 条件：FOC 条件与 *complementary slackness*（互补松弛条件–不等式和乘子的约束关系）；

2. *Lagrange* λ 表示财富的边际效用（价格变动 1 单位对于边际效用的影响），同时也是放松约束条件的影子价格（*shade value of relaxing the constrains in UMP*）；

***UMP* 问题的基本思路**：给定 *preference*（*utility*）的基本性质–效用函数最大化问题（常规的约束优化）

1. 内点解和角点解的问题（KT 条件约束优化）；

2. *Walras law* 意味着预算约束必然是 *bind*（束紧）；

2.2.2 *Indirect Utility Function* $v(p, w) = u(x^*(p, w))$

间接效用函数同属于最优化值函数的范畴—存在不等式关系以及最优值函数的转换关系（*Roy identity* 以及与 $e(p, u)$ 的互换）

HOD 0、关于 w 严格单调递增、关于 p 非增、关于 (p, w) 拟凸 *quasi-convex*、关于 (p, w) 连续

- 证明：零次齐次函数（取决于 $B_{p,w}$ 的零次齐次）、单调性质（*envelope theorem*）
- 拟凸性质证明：证明拟凸等价于下水平集 $\{(p, w) : v(p, w) \leq \bar{v}\}$ 为 *convex set*

$v(p, w)$ 关于 w 严格单调递增表示存在关于 w 的反函数—支出函数 $e(p, u)$ 的存在

2.3 *Expenditure Minimum Problem*

2.3.1 *Expenditure Function* $e(p, u) = p \cdot x^*(p, u)$

1. *HOD 1* (关于 p 一次齐次);

2. 关于 u 严格递增和关于 p 非减（*envelope theorem*）；

3. 关于 p 为凹函数：给出严格证明及其经济意义的解读（自由市场的灵活调整要由于固定价格）；

2.3.2 *Hicks Demand Function* $h(p, u)$

1. 关于 p 为零次其次函数 *HOD 0*（$e(p, u)$ 为一次齐次函数）

2. 不存在多余的效用（等同于 *Walras law*）$u(x) = u$（*by contradiction*）；

3. 凸偏好意味着凸的 $h(p, u)$:给定 $x, x' \in h(p, u)$,则有 $u(x) = u(x') = u, u(x'') \geq min\{u(x), u(x')\} = u$（凸偏好对应拟凹的效用函数）同时 $px = px' = e(p, u), px'' = e(p, u)$；对于 $px'' = e(p, u), u(x'') \geq u$，则有 $x'' \in h(p, u)$。在这种情况下 $h(p, u)$ 不是唯一的，不是一一对应的；

4. 严格凸偏好意味着拟凹的 $h(p, u)$，且 $h(p, u)$ 是唯一的：*by contradiction*；

***Hicks function* 的微分性质**

HOD 0：$D_p h(p, u) p = 0 = S(p, w) p$，其中 $S(p, w) = D_p h(p, u)$；

$D_p h(p,u) = D_p^2 e(p,u)$ 为 *NSD* 的对称矩阵（*symmetric*）——从 $e(p,u)$ 的凹性以及二阶偏导换序可以得到[3]；

2.4 *Duality and Slutsky Equation*

在最优的情况下我们有：$e(p,v(p,w)) = w, v(p,e(p,u)) = u, h(p,u) = x(p,e(p,u)), x(p,w) = h(p,v(p,w))$，据此我们可以给出一般化的 ***Slutsky Equation***：

1. 微分形式：$D_p h(p,u) = D_p x(p,w) + D_w x(p,w) x(p,w)'$
2. 弹性形式：$e_{jk} = e^h_{l,k} - e_{lw}\theta$，其中 θ 表示消费份额
3. *Slutsky matrix* $S(p,w) = D_p h(p,u)$ *NSD and symmetric and satisfies* $S(p,w)p = 0$
4. *Substitution effect and income effect* （*reoptimize the bundle* ）
5. *Hicks demand function* 和 *walras demand function* 的斜率关系：*normal good* 中 *hicks* 更加陡峭；*inferior good* 中 *hicks* 更加平缓（在计算 CV 和 EV 的时候要区别）

$$
\begin{tikzcd}[row sep=huge, column sep=huge]
x(p,w) \arrow[r, bend right, "v=u(x)"'] \arrow[d, leftrightarrow, dotted, bend right, "\text{Slutsky: } \frac{\partial x_i}{\partial p_j}+\frac{\partial x_i}{\partial w}x_j=\frac{\partial h_i}{\partial p_j}"'] \arrow[d, leftrightarrow, bend left, "{\substack{x=h(p,v)\\ h=x(p,e)}}"] & v(p,w) \arrow[l, bend right, "\text{Roy: } x=\frac{-\nabla_p v}{\partial v/\partial w}"'] \arrow[d, leftrightarrow, "{\substack{v(p,e)=\bar{u}\\ e(p,v)=w}}"] \\
h(p,\bar{u}) \arrow[r, bend right, "\text{Adding-up: } e=p\cdot h"'] & e(p,\bar{u}) \arrow[l, bend right, "\text{Shephard: } h=\nabla_p e"']
\end{tikzcd}
$$

图 1: 消费者最优化问题示意图

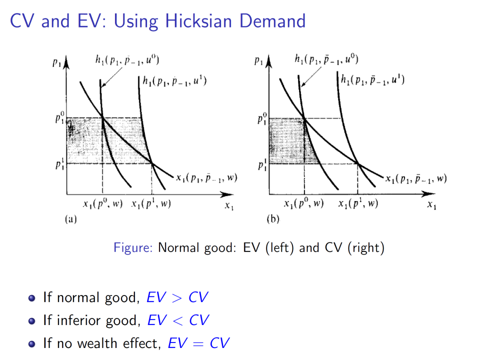
2.5 *Consumer Welfare Analysis*

1. CV、EV 和 CS 的分析关系：图形分析、函数分析和计算、*normal good* 和 *inferior good* 的分析
2. CV：新价格下达到原来效用需要的补偿，即 $e(p^1,u^1) - e(p^1,u^0) = w - e(p^1,u^0) = \int_{p_1}^{p_0} h(p,u^0)dp$
3. EV：老价格下达到新效用需要的补偿，即 $e(p^0,u^1) - e(p^0,u^0) = e(p^0,u^1) - w = \int_{p_1}^{p_0} h(p,u^1)dp$
4. 甄别消费者福利变化情况：图形分析、CV 和 EV 的核算分析

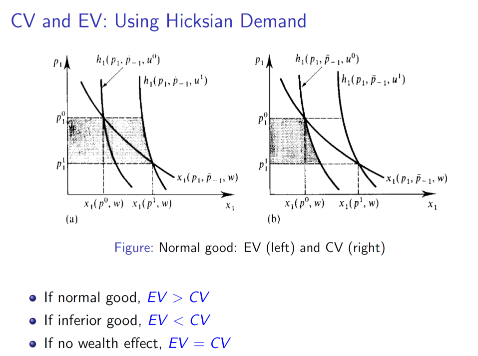
2.5.1 显示偏好下的福利分析

除了上述经典的基于效用函数的福利分析，显示偏好给出了给予选择层面的分析工具：如果消费者选择满足 *WARP*（一致性），消费者如果在状态改变后依然消费的起原来的消费束，则消费者福利情况改善。容易理解，在状态改变后消费得起原来的消费束，表明消费者的福利情况至少和以前一样好。

[3] *Choice Based* 中依赖于 *WARP*，不具备对称性质，*Preference* 中的 *Slutsky Matrix* 约束更加严格



(a) Walras 函数福利分析示意图



(b) Hicks 函数福利分析示意图

2.6 *Integrability and Aggregation*

2.6.1 *Integrability*

假定：$x(p,w)$ 是零次齐次函数（齐次性微分）、符合 *walras law*（预算约束微分）、*Slutsky matrix* 具有 *NSD* 和对称性质（*from preference*）。

同时，*Preference* 下的 *Slutsky matrix* 要求相较于 WARP 更加严格，这是因为仅仅满足 WARP 不足以生成理性的偏好关系（例如传递性不能满足）。

如何从可观测的选择 $x(p,w)$ 得到背后的效用函数 $u(x)$

1. 定理：如果 $x(p,w)$ 满足一次齐次性、*walras law* 以及 $S(p,w)$ 具有 *NSD* 和 *symmetric* 性质，那么存在效用函数可以最优化 *UMP* 问题（其中 *symmetric* 是必须的，这是因为在反推过程中需要借助于 $e(p,u)$ 的存在性，因此 *Slutsky* 必须是负半定的 *symmetric*，否则就不存在这样的效用函数）

2. 仅仅满足 *WARP*（*NSD without symmetric*）、*HOD 0* 和 *Walras law* 不能够生成这样的效用函数

可积性问题的基本思路：给定可观测 $x(p,w)$ ，处理为 $\partial e(p,u)/\partial p = x(p,e(p,u))$，积分求解 $e(p,u)$ 的表达式（可积性）；利用积分常数项来构造效用函数，反推间接效用函数；将间接效用函数转互为 $v(p/w,1)=v(\hat{p}),\hat{p}x=1$ 的形式，解约束优化问题可以得到效用函数的形式 $u(x)=min\ v(\hat{p});\ \hat{p}x=1$。

2.6.2 加总社会需求

定义加总需求表示为

$$x(p,w)=\sum_i x^i(p,w_i), w=\sum_i w_i$$

加总的社会总需求函数 $x(p,w)$ 满足 *HOD0* 和 *walras* 规则，但是是否满足 *WARP* 或者 *Slutsky* 矩阵是否负半定需要依赖于更多的假定。现在我们要考察的问题是：在何种情况下加总需求函数只依赖于价格与加总财富 w？显然的，如果说加总需求满足上述两种要求，消费者必须是同质的，同时个体消费需求必须是个体财富的线性函数。给定如下加总需求形式：

$$x_j^i(p,w_i)=w^iB_j(p)+A_j^i(p)\rightarrow x_j(p,w)=\sum_i x_j^i(p,w^i)=wB_j(p)+\sum_i A_j^i(p)$$

在上述形式中，个体财富与个体异质性相分离，从而满足线性要求，通过加总可以表示为总财富 w 的函数。当且仅当个体需求函数满足上述形式时，社会加总需求可以表示为加总财富的函数。

定义 ***positive representative consumer***：给定社会总预算约束 $p\cdot x\le w$ 的情况下最优化得到社会加总需求函数 $x(p,w)$ 的个体，即实现社会效用最优化问题的虚拟个体。

定理: 存在 *positive representative consumer* 的一个充要条件是间接效用函数满足 ***Gorman Form***:

$$v^i(p, w^i) = a_i(p) + b(p)w^i$$

即间接效用函数关于个体财富 w_i 是线性可分的。根据 *Roy* 等式可以证明,此时的消费者需求函数 $x_j^i(p, w^i)$ 成为 *Gorman Form Demand*。

2.6.3 加总需求的福利分析

定义社会福利函数（*SWF*）: $W(u_1, \ldots, u_L) : R^L \to R$，即社会总所有个体效用的某种函数形式，例如最小化效用、加总效用等等。给定社会福利函数，一个自然的问题便是社会如何最优化分配财富来实现社会福利最大化？数学形式表示为

$$v(p, w) = max\ W(u_1, \ldots, u_L),\ s.t.\ \sum_i w_i \leq w \to (w_1(p, w), \ldots, w_L(p, w))$$

其中 $v(p, w)$ 表示为社会福利最优化对应的间接效用函数。

定理: 假定 $(w_1(p, w), \ldots, w_L(p, w))$ 是社会福利最大化对应的财富分配，则 $v(p, w)$ 为加总社会需求 $x(p, w)$ 对应的间接效用函数。

定义 ***normative representative consumer***: *The positive representative consumer* $\succsim$ *for the aggregate demand* $x(p, w) = \sum_i x_j^i(p, w^i)$ *is a normative representative consumer relative to SWF* $W(\cdot)$ *if the wealth distribution* $(w_1(p, w), \ldots, w_L(p, w))$ *solves SWP for all* (p, w)*, and therefore, the value function of SWP is the Social Indirect Utility Function for* $\succsim$.

A positive representative consumer exists, but there may be no social welfare function that leads to a normal representative consumer.

特例: *With Gorman form individual demand (also Gorman form aggregate demand), the positive representative consumer is also a normative representative consumer" for social welfare defined as sum of individual welfares*

$$v(p, w) = \sum_i v^i(p, w^i)$$

3 *Production Theory*

3.1 *Technology and Production Function*

企业的生产技术被定义为一种投入产出的测度，给定 *input demand set* z 和 *output set* y，生产技术满足：$y=f(z)$，换言之，生产技术决定了生产函数的形式，决定了不同要素的组织形式以及投入产出效率。

定义**规模报酬**（*return to scale*）：如果 $f(\alpha x)=\alpha f(x), \alpha>0$，规模报酬不变（*CRS*）；如果 $f(\alpha x)>\alpha f(x), \alpha>1$，规模报酬递增（*IRS*），否则为规模报酬递减（*DRS*）。给定生产技术也就给定了生产中的规模报酬形式，规模报酬是生产中的核心概念，生产中的不同时刻会呈现出不同的规模报酬，例如在生产初期往往具有规模报酬递增，但是在生产后期会转入规模报酬不变或递减。在成本最小化和利润最大化问题中，规模报酬都有重要的经济含义：利润最大化问题必然要求规模报酬递减。由于生产函数本身内含表示了规模报酬形式，因此生产问题的值函数（成本函数、利润函数等）也内含表现了生产的规模报酬性质。

3.2 *Profit Maximum Problem*

假定企业的生产目的是最大化生产利润，同时假定企业是产品市场和要素要素的价格接受者（不具备 *market power*），p, w 外生。利润最大化问题表示为

$$\pi_{p,w}=max_z\ pf(z)-wz \rightarrow f'(z)=w/p, MRTS_{lk}=w_l/w_k$$

二阶条件要求 $f''(z)<0$，即生产函数必须是凹函数，这意味着生产集合必须是凸集。生产函数为凹函数也意味着边际产品 MP 是递减的，反映为边际产品递减规律：给定其他要素投入不变，伴随着某一要素的投入增加边际产品随之下降；这意味着生产存在最优的要素组合，当超过最优要素组合时，继续增加单一要素的边际回报降低[4]。容易理解，如果生产技术是规模报酬不变或规模报酬递增的，不存在利润最大化的解。这是因为我们总可以通过同时增加要素投入来实现更大的利润，因而只有在规模报酬递减的情况下才会存在利润最大化。

3.2.1 利润函数性质

定义利润最大化问题的值函数：$\pi(p,w)=max_z\ pf(z)-wz$，满足如下性质：

1. 关于 (p,w) 的一次齐次函数 *HOD1*，$\pi(\alpha p,\alpha w)=\alpha\pi(p,w)$；

2. 关于 p 的非减函数，关于 w 的非增函数（包络引理）；

3. 关于 (p,w) 的凸函数；根据利润值函数定义可证明，其经济含义在于价格灵活调整的经济中企业可以灵活调整产出决策以实现利润最大化；

4. *Hotelling* 引理：产出函数 $y=\frac{\partial\pi(p,w)}{\partial p}$，要素需求函数 $z=-\frac{\partial\pi(p,w)}{\partial w}$（包络引理）；

给定利润函数为凸函数，则有

$$\frac{\partial y}{\partial p}=\frac{\partial^2\pi(p,w)}{\partial p^2}>0$$

上式给出了供给定律：产品价格增加导致该产品的供给增加。相应的，对于要素价格而言

$$\frac{\partial z_i}{\partial w_i}=-\frac{\partial^2\pi(p,w)}{\partial w_i^2}\leq 0$$

这表明要素价格上升会导致对于要素的需求降低。

[4]区别规模报酬和边际产品递减规律：规模报酬可以视作长期内所有要素投入同时变化对于生产的影响；边际产品递减规律可以视为短期内单一要素投入变化对生产的影响。

3.3 *Cost Minimum Problem*

既然给定企业的利润最大化，为什么还需要引入成本最小化问题。首先注意到，成本最小化问题时利润最大化问题的必要条件而非充分条件，成本最小化问题的对偶问题是产量最大化。只有当生产函数为凹函数的时候，成本最小化和利润最大化具有相同的解，在其他情况下成本最小化问题不能导出利润最大化的解。为何还需要成本最小化问题？我们可以将利润最大化问题拆解为两步：首先给定产量 y 企业最小化生产成本 $c(w,y)$；其次给定企业利润最大化问题，最优化产量 $y = argmax_y\ py - c(w,y)$，将问题全部转换为关于 y 的优化问题。另外，在一些特殊问题难以确定企业利润形式时，成本最小化提供了有力工具。

标准的成本最小化问题给定为：给定企业的产量 y 最优化生产成本

$$c(w,y) = min_z\ wz\ s.t.\ f(z) \geq y \rightarrow MRTS_{lk} = w_l/w_k$$

成本最小化问题导出引致要素需求函数 $z^* = z(w,y)$。成本最小化问题的二阶条件要求成本函数关于 $f(\cdot)$ 是拟凹函数，即要求投入要素集是凸集合。生产函数只需要满足拟凹函数便可以满足成本最小化问题，同时可以与规模报酬递增的生产技术相兼容。对于凹的生产技术，成本函数二阶导意味着边际成本是递增的，这与边际报酬递减规律相一致。

3.3.1 成本函数性质

定义成本最小化问题的值函数：$c(w,y) = min_z\ wz$，满足如下性质：

1. 关于 y 的非减函数：产出 y 要求越高成本越高；

2. 如果生产函数是 k 次齐次函数，则成本函数 $c(w,y)$ 是关于 y 的 $1/k$ 次齐次函数；当生产函数为规模报酬不变时，成本函数为关于 y 的一次齐次函数 $c(w,y) = yc(w,1)$；

3. 关于 w 的一次齐次函数 $c(\alpha w,y) = \alpha c(w,y)$（根据定义可证）；

4. 关于 w 的凹函数（根据成本值函数定义可证明）；

5. 如果生产函数是凹函数，则成本函数为关于 y 的凸函数，这意味着生产的边际成本递增；

6. *shephard* 引理：$z_i(w,y) = \frac{\partial c(w,y)}{\partial w_i}$（包络引理）；

3.3.2 比较静态分析

给定引致要素需求 $z(w,y)$，要素产量变化对于要素投入的影响可以表示为：如果 $\frac{\partial z(w,y)}{\partial y} \geq 0$ 表示要素为正常要素（*normal factor*），如果 $\frac{\partial z(w,y)}{\partial y} < 0$ 为劣等要素（*inferior factor*），这表明产量增加导致要素需求反而降低。典型的例子是劳动供给超过一定时间后，供给降低成为劣等要素。

进一步可以讨论要素价格变化对于要素引致需求的影响：要素价格上升必然导致该要素的投入降低 $\frac{\partial z(w,y)}{\partial w} \leq 0$，不存在 *Giffen* 要素 $\frac{\partial z(w,y)}{\partial w} < 0$。类比于产品价格变化的替代效应和收入效应，我们同样进行拆解：

1. 替代效应：假定产出 y 固定，则 $\frac{\partial z(w,\bar{y})}{\partial w} \leq 0$（成本函数 $c(w,y)$ 关于 w 的凹性）；

2. 产出效应：考察 y 变化的情形，假定要素为正常要素，则 $\frac{\partial z(w,y)}{\partial y} \geq 0$（成本函数关于 y 的凸函数或边际成本递增）；逻辑含义是要素价格 w_1 降低会导致生产边际成本降低，进而产量 $p = MC$ 随之提高，对于要素 z_1 的需求随之提高；假定要素为劣等要素，则 $\frac{\partial z(w,y)}{\partial y} = \frac{\partial MC(y)}{\partial w} < 0$；逻辑含义是要素价格 w_1 降低导致生产的边际成本提高，从而产量 y^* 随之降低，对于要素 z_1 需求提高；

3.3.3 两步利润最大化

首先给定成本最小化问题

$$c(w,y) = min_z\ wz\ s.t.\ f(z) \geq y \rightarrow MRTS_{lk} = w_l/w_k$$

其次给定利润最大化问题

$$max_y\ py - c(w,y) \to p = MC(y) = \frac{\partial c(w,y)}{\partial y}$$

二阶条件要求边际成本递减，即成本函数为关于 y 的凸函数，据此可以确定供给函数 $y = MC(w,y)$。

给出企业供给函数的三种确定形式：

- 利润最大化：$\frac{\partial \pi(p,w)}{\partial p} = y(p,w)$；
- 两步利润最大化：$\frac{\partial c(w,y}{\partial y} = p$；
- 企业生产决策：$P = MC, P \geq AVC$；

3.4 *Comparative Analysis and Integral*

3.4.1 比较静态分析

给定利润最大化的一阶条件（假定两种要素投入）：

$$pf_1(z^*) - w_1 = 0, pf_2^*(z^*) - w_2 = 0$$

二阶条件表示为

$$H_{\pi(z^*)} = \begin{bmatrix} pf_{11}(z^*) & pf_{12}(z^*) \\ pf_{21}(z^*) & pf_{22}(z^*) \end{bmatrix}$$

其中矩阵 $H_{\pi(z^*)}$ 为负半定矩阵。考察 w_1 变化对于 (z_1, z_2, y) 的影响，可以对一阶条件偏导，根据隐函数定理 $\frac{dz_1^*}{dw_1} = -\frac{dF/dw_1}{dF/dz_1^*}$ 确定影响方向。一般而言，w_1 提高会导致 z_1 需求降低，对于 z_2 的影响不确定，取决于是否为劣等要素或者两种要素的互补或替代关系：

$$\frac{\partial z_1^*}{\partial w_1} = \frac{pf_{22}(z^*)}{det(H)} < 0, \frac{\partial z_2^*}{\partial w_1} = \frac{-pf_{21}(z^*)}{det(H)}$$

后者方向并不确定，其中 f_{12} 表示两种要素在生产中的替代或互补关系。进一步的可以确定

$$\frac{\partial y^*}{\partial w_1} = f_1(z^*)\frac{\partial z_1^*}{\partial w_1} + f_2(z^*)\frac{\partial z_2^*}{\partial w_1}$$

方向同样不确定，需要取决于生产函数的形式。简单的理解，如果要素价格 w_1 提高意味着 z_1 投入降低，如果该要素为正常要素，则产出相应的提高，否则产出降低；进一步的，如果要素 z_2 为正常要素，产出提高会导致对于要素 z_2 的引致需求提高。

3.4.2 可积性与加总问题

可积性研究的基本问题是如何从成本函数或企业利润函数中确定企业的生产技术（生产函数）？本节略过。

现在考察供给的加总问题，假定存在 J 个企业，每个企业的生产集表示为 $\{Y_j\}_1^J$，根据利润最大化可以确定企业供给函数 $y_j(p) = argmax_y\ py$，加总供给表示为

$$y(p) = \sum_j y_j(p) = \{y | y = \sum y_j, y_j \in y_j(p), \forall j\}$$

其中 $y = \sum_j y_j$ 表示加总的企业生产集。相应的我们可以假定代表性企业实现加总利润最大化

$$y^*(p) = argmax_y\ py$$

其中 $\pi^*(p) = \sum_j \pi_j(p), y^*(p) = \sum_j y_j(p)$ 表示加总利润与生产集，上述形式表明每个私人企业生产的加总形式与集中化的代表性企业最优化问题等价。相比于消费需求加总问题的复杂性，供给的加总更为简单，这是因为供给加总重没有预算约束，不存在收入效应，当价格变化时只存在替代效应因而可以直接进行加总。

4 *Uncertainty Theory*

4.1 *VNM Expected Utility Theorem*

定义 *Prize* $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ 表示各种可能的 *prize* 空间，定义 *lottery*：$L = (p_1, \ldots, p_n)$，其中 p_i 表示 i 发生的可能性，因此 *lottery* 在这里定义为所有可能性的概率空间，$\sum_i p_i = 1$。

基于 *lottery* 空间，我们定义不确定性下的偏好公理：

1. 完备性：任意两个 *lottery* 是可以比较的；

2. 传递性：*lottery* 的偏好关系具有传递性；

3. 连续性：α 的微小改变不会影响偏好的序关系；

4. 独立性公理：$L \succsim L'$ 当且仅当 $\alpha L + (1-\alpha)L'' \succsim \alpha L' + (1-\alpha)L''$，即任意两个 *lottery* 的偏好关系不受到其他 *lottery* 的影响（可分离关系）；

值得注意，在 *lottery* 的偏好公理中，独立性公理要求最为严格，任意两个 *lottery* 的偏好关系不依赖于第三个 *lottery*。但是实际上该公理的成立性存疑，*Allais paradox* 给出了违背独立性公理的情形。在此情况下，第三种 *lottery* 的存在会改变个体对于投资或消费的选择，进而违背独立性公理。

如果 *lottery* 上的偏好满足完备性、传递性和连续性公理，则存在效用函数可以表征偏好关系；此外如果满足独立性公理，则存在期望效用函数表征偏好关系。我们定义 VNM 期望效用函数

$$U(L) = \sum_i u_i p_i$$

表示为 *lottery* 空间中各种可能情形下效用的线性期望和。**可以证明**：如果效用函数满足期望效用函数形式，则等价于

$$U(\sum_k \alpha_k L_k) = \sum_k \alpha_k u(L_k), \sum_k \alpha_k = 1$$

上述定理表明期望效用函数是效用的线性加总，从而复合 *lottery* 的期望效用函数可以拆分为概率加权的简单 *lottery* 的期望效用和。

给定**期望效用定理**：如果 *lottery* 上的偏好满足完备性、传递性、连续性和独立性公理，那么存在期望效用函数表征该偏好关系，这等价于

$$L \succsim L' \to \sum_n u_n p_n \geq \sum_n u_n p'_n$$

这意味着给定 *lottery* 上的偏好假定，个体对于 *lottery* 的不同偏好可以被简单的表示为期望效用函数。

4.2 *Money Lotteries and Risk Aversion*

不确定性消费者决策的关键在于风险态度，我们通过引入货币 *lottery* 逐步建立消费者风险态度的分析框架。首先，货币 *lottery* 定义为

$$F : X \to [0,1], F(x) = Pr(x' \leq x)$$

其中 $F(x)$ 是获得不少于 x 单位货币的累计概率分布，此时复合 *lottery*$(L_1, \ldots, L_k; \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ 可以表示为 $F(x) = \sum_k \alpha_k F_k(x)$，其中 $F_k(x)$ 是 *lotteryk* 的累积分布函数。给定上述定义，任意 *lottery* 可以被如下效用函数表征：

$$U(F) = \int u(x) dF(x)$$

其中 $u(\cdot)$ 定义为 *Bernoulli* 效用函数，其函数形式决定了个体的风险态度以及不确定下的选择。

4.2.1 *Risk Aversion*

风险规避可以被如下等价命题所表示：抽象分析借助于凹函数图像展开比较灵活

- *Bernoulli* 效用函数是凹函数，即 $u'(x) > 0, u''(x) < 0$，个体为风险规避型；
- 期望效用小于期望收益的效用值：$U(F) = \int u(x)dF(x) \leq u(\int dF(x)) = u(E(x)), \forall F$；
- 确定性等值小于期望收益：$u(c(F,u)) = \int u(x)dF(x)$，相应的 $c(F,u) \leq E(x)$；
- 风险溢价大于 0，即 $\pi(x,\varepsilon,u) > 0$，图形所示表示为确定性等值和期望收益的距离；
- 定义绝对风险规避系数 $r_A = -\frac{u''(x)}{u'(x)} > 0$ 表示风险规避，定义相对风险规避系数 $r_w = -\frac{xu''(x)}{u'(x)} > 0$；

4.2.2 *Case*: *Insurance*

定义标准的保险问题下的期望效用函数：

$$max_a \ pu(w - ca - L + a) + (1-p)u(w - ca) \rightarrow pu'(w - ca - L + a) = (1-p)u'(w - ca)c$$

其中个体财富为 w，以 p 的概率损失 L；消费者购买保险 a 单位，c 为单位保险的价格，损失后相应的赔付 a 单位。给定上述期望效用最大化问题的一阶条件，对于优化方程，存在 c,a 两个未知数，需要做进一步的假定。

假定保险公司是征收公平保费，这意味着保险公司的期望收益为 *0*:

$$pa + (1-p)o = ca \rightarrow c = p$$

这意味着公平保费下保险价格 c 等于风险发生概率 p。代入一阶条件得到

$$pu'(w - ca - L + a) = (1-p)u'(w - ca)c \rightarrow a^* = p$$

因此公平保费下消费者选择完全投保；此时可知消费者在任意情况下的收入都为确定性的 $w - pL$，保险的功能是抵消了不确定性带给个体效用的负面冲击。

如果保险公司是市场化主体从而 $c > p$，代入一阶条件可知

$$\frac{u'(w - ca - L + a)}{u'(w - ca)} = \frac{(1-p)c}{p(1-c)} > 1 \rightarrow a^* < L$$

因此非公平保费下个体选择部分投保，这是因为将财富配置到 *loss state* 成本高昂，因此个体更愿意将财富配置到 *no loss state*，从而实现财富在不同状态的转移。

4.2.3 不同个体风险规避程度比较

如果效用函数 u 相对于效用函数 v 风险规避程度更高（*more risk averse*），这意味着：

- 绝对风险厌恶程度满足 $r_A(u) \geq r_A(v)$，即在任意的 x 处 u 对应的风险厌恶程度更高；
- 存在递增的凹函数 ϕ 使得 $u = \phi(v)$，这意味着 u 是 v 的凹变化，风险厌恶程度更高；
- 确定性等值满足 $c(F,u) \leq c(F,v)$，即 u 的确定性等值在更右侧；
- 风险溢价满足 $\pi(x,\varepsilon,u) \geq \pi(x,\varepsilon,v)$，即风险厌恶程度越高相应的风险溢价越高；

4.2.4 不同收益分布的比较

除了比较效用函数的风险厌恶程度，我们还可以比较不同收益分布进而确定哪一种收益下个体效用更高；对比收益分布存在两种思路：一是比较收益，二是比较分布风险。

定义**一阶随机占优（FOSD）**：如果分布 F 一阶随机占优于 G，这意味着

$$\int u(x)dF(x) \geq \int u(x)dG(x)$$

表示个体在分布 F 下的期望效用大于分布 G 下的期望效用；从分布图上来看，分布 F 始终位于分布 G 的右侧，从而对应的期望收益更高。一阶随机占优意味着 $\int xdF(x) \geq \int xdG(x)$，即分布 F 的期望收益高于分布 G，但是反之则不必然。

定义 ***Upward Probabilistic Shift:*** 对于任意给定的分布 $G(x)$，我们可以以下变化得到一阶随机占优于分布 G 的分布 F。给定 $x+z$，其中 z 服从分布 $H_x(z), H_x(0)=0$，相应的可以得到

$$\int u(x)dF(x) = \int [\int u(x+z)dh_x(Z)dG(x)] \geq \int u(x)dG(x)$$

换言之，如果说分布 F 一阶随机占优于分布 G，则分布 F 是分布 G 的 *Upward Probabilistic Shift*。几何解释是 *Upward Probabilistic Shift* 将分布 G 整体右移从而生成一阶随机占优分布 F，*Upward Probabilistic Shift* 变换后期望收益高于分布 G 的期望收益。

定义**二阶随机占优（SOSD）**：对于分布 F, G，如果满足 $\int xdF(x) = \int xdG(x)$，我们称分布 F 二阶随机占优于分布 G：

$$\int u(x)dF(x) \geq \int u(x)dG(x)$$

这意味着分布 $F(x)$ 的风险相对于分布 $G(x)$ 更高，直观上理解即给定相同的均值，分布 F 的期望收益更高表明风险更低。

定义 ***Mean Preserving Spread:*** 给定分布 F，我们可以通过均值保留过程生成分布 G，使得分布 F 二阶随机占优于 G。对于 $x+z$ 的分布 G，假定 x 服从分布 F，z 服从分布 $H_x(z)$，并且 $\int zdH_x(z)=0$，可以证明

$$\begin{aligned}
\int xdG(x) &= \int xdF(x) \\
\int u(x)dG(x) &= \int [\int u(x+z)dH_x(z)]dF(x) \\
&\leq \int u[\int (x+z)dH_x(z)]dF(x) = \int u(x)dF(x)
\end{aligned}$$

通过均值保留过程，分布 F 的均值与分布 G 的均值相同，但是相对于分布 F，分布 G 更为分散，从而风险更高。

4.3 *Subjective Expected Utility*

4.3.1 *State Expected Utility*

我们将状态 s 引入不确定性进行考察，这是自然的，在不同状态下面个体的效用会出现系统性的差异，例如在雨天和晴天持有雨伞的效用完全不同。我们定义状态空间 $s \in S$，同时状态发生概率为 π_s。定义状态依存的期望效应，与之相对应的给出拓展的期望效用函数：偏好具有拓展的期望效用函数形式，如果满足如下形式

$$(x_1, \ldots, x_s) \succsim (x_1', \ldots, x_s') \rightarrow \sum_s \pi_s u_s(x_s) \geq \sum_s \pi_s u_s(x_s')$$

其中拓展期望效用函数表示为 $\sum_s \pi_s u(x_s)$，此时 $u(x_s)$ 为状态独立的效用函数，$u_s(x_s)$ 表示状态依赖的效用函数，即 $u_s = u(x|s)$。采用如上形式定义，我们讲不确定性下的期望效用建立在条件概率的基础上，从而可以利用条件期望确定不同状态下的期望效用。在这里，期望效用定义为不同状态下个体效用函数的线性加总。

拓展期望效用函数存在性定理：如果定义在 $\mathcal{L}$ 上的偏好满足理性、连续性和拓展独立性公理，那么存在函数 u_s 使得

$$L \succsim L' \to \sum_s (\int u_s(x_s) dF_s(x_s)) \geq \sum_s (\int u_s(x_s) dF'_s(x_s))$$

给定偏好满足如上假设，存在定义在状态空间上的期望效用函数，按照状态发生概率进行加总。

4.3.2 *Subjective Expected Utility*

传统的不确定性理论中我们将风险视为客观的，但是很多时候对于风险的认知是极其主观的事情，现在我们纳入个体的主观效用来处理风险问题。***Anscombe and Aumann*** **(*1963*)** 给出了主观期望效用函数的处理过程。我们假定状态空间位 $S = (1, \ldots, S)$，定义 *prize* 为 X，假定 *horse lottery* 为 $H = \{h : S \to \mathcal{L}\}$。此时，$h(x|s)$ 表示在状态 s 下获得 x 的概率，状态对应的概率空间为 $h(s) = (h(x_1|s), \ldots, h(x_n|s))$。

假定定义在 H 上的偏好满足理性、连续性和状态独立性公理，**则存在如下期望效用函数表征偏好** $\succsim$：

$$v(h) = \sum_{s \in S} \pi(s) (\sum_{x \in X} u(x) h(x|s)), \sum_s \pi_s = 1$$

其中 $v(\cdot)$ 表示主观期望效用函数，对于 $h \succsim g$，我们有 $v(h) \geq v(g)$，从而我们将概率空间的偏好比较建立在主观期望效用函数比较上面。主观期望效用函数的形式是给定状态 s，确定该状态下的期望效用 $\sum_x u(x) h(x|s)$，其中 $h(x|s)$ 表示状态 s 下 x 发生的概率，最后按照状态发生概率 π_s 将对应转态下的期望效用加总得到主观期望效用函数。主观体现在 s 的发生概率依赖于个体对于转态的判定。在这里效用函数给定了状态独立 $u_s(x_s) = u(x_s)$，拓展中我们可以将其表示为状态依存的效用函数 $u_s(x_s) = u_s(x|s)$。

4.3.3 *Case*：*Subjective Expected Utility*

给定赌局 *1*h_1：在状态 1 下以概率 $p = 1$ 获得 *1* 元收入，在状态 2 下以概率 $p = 0$ 获得 *0* 元收入*;* 给定赌局 *2*：在状态 1 下以概率 $p = 0$ 获得 *1* 元收入，在状态 2 下以概率 $p = 1$ 获得 *0* 元收入。假定个体相比于 h_2 更偏好于 h_1。那么据此我们能否确定个体对于不同状态发生概率的主观信念，即 $\pi(s)$？

我们假定存在两种状态 $S = \{T, NT\}, X = \{0, 1\}$，进一步假定消费者喜欢钱越多越好，即 $u(1) > u(0) = 0$

$$v(h_1) = \pi(T)[u(1) \times 1 + u(0) \times 0] + \pi(NT)[u(1) \times 0 + u(0) \times 1] = \pi(T) u(1)$$
$$v(h_2) = \pi(T)[u(1) \times 0 + u(0) \times 1] + \pi(NT)[u(1) \times 1 + u(0) \times 0] = \pi(NT) u(1)$$

我们知道 $h(1) \succsim h(2)$，相应的有 $v(h_1) \geq v(h_2) \to \pi(T) > 1/2 > \pi(NT)$，这意味着个体认为状态 T 发生的概率更高，在这里 $\pi(T)$ 就表示个体先验的对于状态发生的主观信念。

给定赌局 *3*h_3：在状态 *1* 下以概率 p 获得 *1* 元收入，否则获得 *0* 元收入；给定赌局 *4*h_4：在状态 *2* 下以概率 q 获得 *1* 元收入，否则获得 *0* 元收入。假定个体认为 h_3 和 h_4 无差异，那么据此我们可以推断出两种状态下个体信念是什么？

参考上述思路，可以得到赌局 *3* 和赌局 *4* 对应的主观期望效用函数：

$$v(h_3) = \pi(T)[u(1) \times p + u(0) \times (1 - p)] = \pi(T) u(1) p$$
$$v(h_4) = \pi(NT)[u(1) \times q + u(0) \times (1 - q)] = \pi(NT) u(1) q$$

我们知道 $h_3 \sim h_4$，相应的 $v(h_3) = v(h_4)$，即 $\pi(T) q = (1 - \pi(T)) p \to \pi(T) = \frac{p}{p+q}$。

4.3.4 *Update Subjective Expected Utility*

上述给定的主观期望效用理论尽管考虑到个体的主观信念对于不确定性下决策的影响，但是个体信念是静态的；实际中，当个体获得更多信息或 *learning* 中往往会根据经验更新自己对于状态的信念 $\pi(s)$，此时我们将信念更新引入不确定性的决策过程，进而考察动态的个体决策问题，同时为分析决策中信息价值提供框架。

给定**贝叶斯信念更新过程**：假定事件 A 发生，个体对于状态的信念 $\pi(s|A)$ 表示为条件概率的形式

$$\pi(s|A) = \frac{\pi(A,s)}{\pi(A)} = \frac{\pi(A|s)P(s)}{\pi(A)}$$

贝叶斯信念更新的过程属于经典的个体看到了结果来反推原因，进而更新其对于状态的主观信念。例如事件 A 发生后，个体对于状态 s 的主观信念会增加，认为 s 更有可能出现，从而改变其决策过程。信念更新之后，个体如何更新建立在概率空间上的偏好？如果概率空间上的偏好 $\succsim$ 具有主观期望效用函数的形式 (π,u)，那么对于任意的 $A\subset S$，相应的有

$$f \succsim_A g \rightarrow \sum_{s\in A}\pi(s|A)\sum_x u(x)f(x|s) \geq \sum_{s\in A}\pi(s|A)\sum_x u(x)g(x|s)$$

其中 $\pi(s|A)$ 表示事件 A 发生后个体对于状态 s 的主观信念。

4.3.5 *Value of Information*

给定信念更新过程的主观期望效用函数理论，我们可以据此分析信息价值：即给定个体信息后，个体更新其对于状态的信念从而获得更高的收益，这部分收益就是信息的价值。

假定信息表示为 $s\in A$ 或者 $s\notin A$, 其中状态给定为 $S=\{A,\sim A\}$；如果不存在信息，则 h^* 是主观期望效用最优化的解；如果信息 A 可得，则 h_A^* 是信息 A 对应的主观期望效用最优化的解；如果信息 $\sim A$ 可得，则 $h_{\sim A}^*$ 是信息 $\sim A$ 对应的主观期望效用最优化的解。我们假定个体在概率空间 H 上存在主观期望效用函数 (π,u)，相应的定义贝叶斯信念更新后的状态概率：

$$\pi_A(s)=\pi(s|A), \pi_{\sim A}(s)=\pi(s|\sim A), \pi_A(s)\pi(A)=\pi(s|A)\pi(A)=\pi(s\cap A)$$

根据定义可知

$$\sum_{s\in A}\pi_A(s)\sum_x u(x)h_A^*(x|s) \geq \sum_{s\in A}\pi_A(s)\sum_x u(x)h^*(x|s)$$
$$\sum_{s\in\sim A}\pi_{\sim A}(s)\sum_x u(x)h_{\sim A}^*(x|s) \geq \sum_{s\in\sim A}\pi_{\sim A}(s)\sum_x u(x)h^*(x|s)\sim A(x|s)0$$

不等式左右两侧同时乘以 $\pi(A),\pi(\sim A)$，加总可得

$$RHS=\sum_{s\in S}\pi(s)\sum_x u(x)h^*(x|s)$$

表示未获得信息前的主观期望效用函数；同理可得

$$LHS=\pi(A)[\sum_{s\in A}\pi_A(s)\sum_x u(x)h_A^*(x|s)]+\pi(\sim A)[\sum_{s\in\sim A}\pi_{\sim A}(s)\sum_x u(x)h_{\sim A}^*(x|s)]$$

这表示获得信息 A 和 $\sim A$ 之后的主观期望效用函数，不等式得到 $RHS\leq LHS$，这表明获取信息始终要比不获取信息要好。

4.3.6 *Case*: *Value of Information*

假定个体参与扔硬币猜正反的赌局，如果猜中获得 *30* 元，如果猜错损失 *50* 元；假定硬币存在三种状态：全是正面、全是反面以及一正一反，定义为 $(2H, 2T, F)$；个体对于三种状态的先验信念为 $\pi(2H) = \pi(2T) = \pi(F) = 1/3$。假定个体是风险中性的，即 $u(x) = x$。在该种情况下个体是否会参加赌局？如果允许个体提前看一次掷硬币结果，个体是否会参加赌局？提供个体看一次赌局的信息对应的价值是多少？

首先考虑不提供信息的情形，此时个体猜正面的概率为

$$P(H) = 1/3 \times 1 + 1/3 \times 0 + 1/3 \times 1/2 = 1/2$$

其中 $\pi(H|2H) = 1, \pi(H|2T) = 0, \pi(H|F) = 1/2$ 表示对应状态下事件发生或者获取收益 H 的条件概率。相应的，个体期望收益为

$$30/2 + (-50) \times 1/2 < 0 = u(0)$$

对于风险厌恶的个体而言不会参加赌局。

现在假定个体可以看到第一次掷硬币的结果。我们首先考察第一次掷硬币结果为 H，相应更新信息

$$\pi(s|H) = \frac{\pi(s)P(H|s)}{P(H)}$$

例如 $P(s = 2H|H) = \frac{\pi(s)P(H|s)}{P(H)} = \frac{1/3 \times 1}{1/2} = 2/3$。个体更新完信念之后，重新计算个体对于猜正面的概率为

$$P(H|H) = \sum_{s=2H,2T,F} \pi(s|H)P(H|s) = 2/3 \times 1 + 0 \times 0 + 1/3 \times 1/2 = 5/6$$

此时猜正面的期望收益给定为

$$5/6 \times (30) + (-50) \times 1/6 = 16\frac{2}{3} > 0 = u(0)$$

个体会参与赌局，$16\frac{2}{3}$ 是个体愿意获得信息的最大支付。

其次考察第一次掷硬币结果为 T，重新计算得到期望收益为 $16\frac{2}{3}$。综合上述两种结果可以知道：

$$EU = 1/2 \times 16\frac{2}{3} + 1/2 \times 16\frac{2}{3} = 16\frac{2}{3}$$

其中第一次出现正面和第一次出现反面的概率各为 $1/2$，因此参观第一次掷硬币结果的信息价值为 $16\frac{2}{3}$，个体最多愿意支付该价格以获取参与信息。

5 *General Equilibrium*

给定消费者理论和生产者理论，接下来需要讨论经济学中最重要的概念–均衡，即市场中消费者与生产者是如何互动从而实现资源配置。假定完全竞争的市场环境，需要分析：一是均衡状态下的资源配置情况（均衡是什么）；二是均衡状态下的资源配置情况是不是有效率的（均衡的评价）；基于此，首先分析局部均衡，其次分析一般均衡，给出均衡的决定以及福利经济学基本定理。一般的，均衡下的资源配置需要分析三个内生变量：消费者需求 x_i、厂商供应 y_j 以及产品相对价格 P。

5.1 *Partial Equilibrium*

考虑局部均衡的完全竞争市场环境，其经济意义在于只考察单个产品市场或要素市场中生产者与消费者的互动关系；局部均衡的单一市场分析意味着关注的市场是大市场中的一小部分，市场足够小从而产品价格变化既不会产生替代效应也不会产生收入效应从而改变其他产品市场的均衡。如果产品价格变化通过收入和替代效应影响其他产品均衡，则被定义为具有一般均衡效应。局部均衡的关注点只在于自身，下面考察局部均衡的决定以及福利分析。

5.1.1 *Pareto Optimal*

在市场中，均衡给定了资源配置情况。何为资源配置？假定市场中有 I 个消费者需求 x_i 和 J 个生产者供应 y_j，经济中共有 L 种产品，相应的禀赋为 w_l。资源配置表示为

$$(x_i, y_j) \in \{(x_i, y_i) | \sum_i x_i = w + \sum_j y_j\}$$

即给定市场总供给与需求约束，经济中的资源配置 (x_i, y_j) 是所有消费者需求与所有生产者供给情况。满足资源禀赋的供求约束的 (x_i, y_j) 都是可行的资源配置，一个自然的问题是如何在可行的资源配置中选择最优的资源配置？

给定 *Pareto Optimal*：不存在其他的资源配置 (x'_i, y'_j) 使得 $u(x') > u(x)$，即不存在 *Pareto Improvement*。可以定义效用可能性集合（*utility possibility set*）表示经济中个体效用的集合，即

$$U = \{(u_1, u_2, u_2, \ldots, u_l)\}$$

相应的，效用可能性集合的边界就代表了当前经济中资源配置能够达到的最大效用；边界曲线意味着实现经济中最优效用可能性的各种效用分配情况，这意味着最优的资源配置只是一种效率意义上的概念，而不涉及公平，因为注意到效用可能性边界曲线包含了各种配置情况。等价的，*Pareto Optimal* 是一组实现效用最大化的资源配置集合。

5.1.2 拟线性产品下的局部竞争均衡

下面以拟线性产品为例分析局部竞争均衡市场的资源配置情况及其福利分析。采用拟线性产品的好处在于忽略收入效应从而避免了对于初始资源禀赋分布的讨论，更聚焦于产品价格变化带来的影响。假定消费者 i 具有产品 l 的初始禀赋为 w_{il}，产品 l 总禀赋为 $w_l = \sum_i w_{il}$，消费者 i 具有禀赋 w_i；厂商利润归消费者所有，θ_{ij} 表示消费者 i 从企业 j 获取的利润份额。

假定消费者只消费两类产品：产品 l 和其他产品 m，将 m 处理为等价物（numeraire），产品 l 价格为 p。消费者 i 的效用函数给定为

$$u_i(m, x) = \phi_i(x_i) + m_i, \phi' > 0, \phi'' < 0$$

对于厂商而言，利用 m 作为投入生产 l，$c_j(q_j)$ 表示 j 企业使用 m 生产 q_j 单位的 l 产品的成本函数，企业利润表示为

$$max_{q_j} \; pq_j - c_j(q_j), c' > 0, c'' \geq 0$$

假定消费者只拥有 m 的初始禀赋 w_{mi}，产品 l 的初始禀赋为 0，全部来自于生产；给定经济中的总预算约束

$$px_i + m_i = w_{mi} + \sum_j \theta_{ij}(pq_j - c_j(q_j)), w_m = \sum_i w_{mi}$$

等式左侧表示消费者支出，右侧表示消费者收入（来自于禀赋和企业利润收入）。

竞争均衡由如下条件给定：（1）消费者最优化消费决策；（2）企业最优化生产决策；（3）市场出清。给定上述问题，均衡表示为

$$\begin{aligned} p^* &= c_j'(q_j^*), j = 1, \ldots, J \\ \phi'(x_i^*) &= p^*, i = 1, \ldots, I \\ \sum x_i^* &= \sum_j q_j^* \end{aligned}$$

均衡在消费者和生产者之间的实现纽带是价格 p^*。考虑到采用的是拟线性效用函数形式，资源配置不取决于收入效应（禀赋 w_i 和利润分成 θ_{ij} 不影响均衡资源配置）。

现在来考察 *Pareto Optimal*：最优化消费者效用函数表示为

$$\begin{aligned} max_{x,q} \ & \sum_i \phi_i(x_i) + w_m - \sum_j c_j(q_j) \\ s.t. \ & \sum_i x_i = \sum_j q_j \end{aligned}$$

现在来理解一下目标函数：给定拟线性的消费者效用函数，加总得到 $\sum \phi_i(x_i) + \sum_i w_{mi}$，根据拟线性效用函数可知，$m$ 的最优消费等于 $\sum_i w_{mi} - \sum_j c_j(q_j) = w_m - \sum_j c_j(q_j)$，即总收入减去购买产品 l 的总费用，也即生产 q_j 单位的总支出。

重新定义经济中的 *marshallian surplus* 或者社会总剩余：

$$\mathcal{WS} = \sum_i \phi_i(x_i) - \sum_j c_j(q_j)$$

定义为经济总的总效应与经济中生产总成本之和，用于刻画经济中的总剩余。*Pareto Optimal* 下的资源配置 (x^*, q^*) 最大化社会总福利，因而从两方面理解 *Pareto Optimal*：一是经济中最有效的资源配置；二是社会总剩余最大化的资源配置（从中央计划者的角度出发）。给定一阶条件

$$\begin{aligned} [q_j] &: \mu = c_j'(q_j) \\ [x_i] &: \phi_i'(x_i) = \mu \\ \sum_i x_i^* &= \sum q_j^* \end{aligned}$$

其中 μ 表示资源约束的影子价格，均衡时满足 $\mu = p$，这就意味着均衡时的价格 p 是产品的边际社会价值。

5.1.3 福利经济学第一定理

The First Fundamental Theorem of Welfare Economics：在完全竞争市场中，如果 p^* 和资源配置 (x_i^*, q_j^*) 构成了竞争均衡，则该资源配置是 *Pareto Optimal*。福利经济学第一定理说明：竞争均衡下的资源配置是 *Pareto Optimal*，即实现了社会总剩余的最大化。

5.1.4 福利经济学第二定理

竞争均衡下的资源配置是 *Pareto Optimal*,那么接下来要考虑:如果已知某种分配是 *Pareto Optimal*,是否能够通过的调整状态通过市场竞争均衡实现?即任意给定的 *Pareto Optimal*,是不是可以通过调整初始分配下的竞争均衡实现?在拟线性效用函数设定下,产品 l 不会受到初始分配的影响,初始分配调整只会影响 m_i,因而通过再分配资源可以实现 *Pareto Optimal*。

The Second Fundamental Theorem of Welfare Economics:在完全竞争市场和凸的偏好与生产集合假定下,任意给定的 *Pareto Optimal* 配置 $(u_1^*, \ldots, u_I^*)$,可以通过初始禀赋 $(w_{m1}, \ldots, w_{mI})$ 的再分配计划 $(T_1, \ldots, T_I)$ 实现,满足 $\sum_i T_i = 0$,从而禀赋给定为 $(w_{m1} + T_1, \ldots, w_{mI} + T_I)$,通过竞争均衡实现 $(u_1^*, \ldots, u_I^*)$。此时,$\mu = p$ 表示产品的边际社会价值。

福利经济学第二定理说明:任意的 *Pareto Optimal* 都可以通过再分配初始禀赋的竞争均衡实现。但是,福利经济学只是给出了效率意义上的提升,而并没有给出公平意义上的分析;例如,一个消费者具有全部禀赋的经济也是 *Pareto Optimal* 的,因为不存在 *Pareto Improvement*。

5.1.5 福利分析

给定社会福利最优化问题

$$
\begin{aligned}
max_{x,q} \ & \sum_i (\phi_i(x_i) + m_i) = \sum_i \phi_i(x_i) - \sum_j c_j(q_j) + w_m \\
s.t. \ & \sum_i x_i = \sum_j q_j
\end{aligned}
$$

内点解满足一阶条件

$$\lambda = c_j'(q_j) = \phi_i'(x_i)$$

其中 λ 表示资源约束的影子价格。最优条件满足 $\lambda = p$,等价于产品的市场价格。下面重新从福利的角度考察 *marshallian surplus* 究竟意味着什么。

分别给定生产者剩余和消费者剩余:

$$
\begin{aligned}
CS &= \sum_i (\phi_i(x_i) - px_i) \\
PS &= \sum_j (pq_j - c_j(q_j)) \\
WS = CS + PS &= \sum_i \phi_i(x_i) - \sum_j c_j(q_j)
\end{aligned}
$$

marshallian surplus 等价于经济中生产者剩余与消费者剩余之和,因而表示为社会总剩余。

当外在条件变动时,相应的社会福利变化分析如下:给定 $X = \sum_i x_i$,最优解满足 $\phi_i(x_i) = p(X)$;相应的给定 $Q = \sum_j q_j$,最优解满足 $c_j'(q_j) = c'(Q)$,资源约束可以得到 $\sum_i dx_i = \sum_j dq_j, dX = \sum_i dx_i$,相应的可以得到

$$dWS = \sum_i \phi_i(x_i) dx_i - \sum_j c_i(q_j) dq_j = p(X) \sum_i dx_i - c'(Q) \sum_j dq_j = (p(X) - c'(Q)) dx$$

从图形上理解就是需求函数以下、供给函数以上的区域面积,也即总剩余的变化面积。

注意到,上述结论的给出依赖于拟线性效用函数形式,那么上述结论对于一般效用函数是否依旧成立?首先,对于竞争均衡而言,拟线性效用函数并非至关重要;其次,拟线性效用函数对于福利分析是至关重要的,这是因为拟线性效用忽略了产品 l 的收入效应,从而福利还要考察 m_i 的分布而不光仅仅是 l 的消费量。

5.2 *Pure Exchange Economy*

首先讨论最简单的一般均衡问题–纯交换经济的一般均衡，即不存在生产情形下禀赋交换的一般均衡。对于这一问题，需要分析：（1）纯交换经济的均衡是什么？如何决定？（2）纯交换经济是有效率的吗？纯交换经济的一般分析工具是 *edgeworth box*，给出一般均衡下消费者的最优化问题与禀赋约束可以确定相对价格 p 与交换均衡。

5.2.1 *Model Benchmark*

给定两个个体的纯交换经济，假定存在个体 A, B, 两种商品 $1, 2$，以及个体对两种商品的禀赋 $w_A = (w_A^1, w_A^2), w_B = (w_B^1, w_B^2)$，经济中的实际配置给定为 $(x_A^1, x_A^2), (x_B^1, x_B^2)$，纯交换经济需要满足禀赋约束，即

$$x_A^1 + x_B^1 = w_A^1 + w_B^1, x_A^2 + x_B^2 = w_A^2 + w_B^2$$

假定消费者存在严格凹的严格单调偏好,消费者效用函数分别表示为 $u_A = u_A(x_A^1, x_A^2), u_B = u_B(x_B^1, x_B^2)$。

给定产品相对价格 p_1/p_2，最优化消费者 A, B 的决策可以得到

$$MRS_{12}^A = p_1/p_2 = MRS_{12}^B$$

据此可以确定需求函数 $x_i(p, pw_i)$。在这里本应该直接求解确定一般均衡配置，但是对于一般化的问题，如何确定一般均衡的存在性？在这里，从纯交换经济处罚给出一般均衡存在性等性质的分析框架。定义超额需求

$$z_i^l(p) = x_i^l(p, pw_i) - w_i^l$$

其中 l 为产品，i 为消费者，消费者 i 的超额需求为实际需求与其所持有的产品禀赋之间的差额，经济中的总超额需求定义为 $z(p) = \sum_i z_i(p, w_i)$。市场出清（竞争均衡）满足如下情况

$$z(p) = 0 \; or \; z(p) \leq 0, pz(p) = 0$$

这意味着经济中的总超额需求等于 0；或者如果经济中某产品的超额需求小于 0，表明经济中有大量的剩余，此时该产品一定是价格为 0（不稀缺不值钱）。上述情况下必然意味着不同消费者的需求函数相交于同一点[5]，此时 $MRS_{12}^A = p_1/p_2 = MRS_{12}^B$，基于此，给出了纯交换经济均衡条件。

5.2.2 超额需求与一般均衡的存在性

超额需求满足以下基本性质：

1. $z(p)$ 是 *HOD0* 函数，这是因为 *Marshall* 需求函数 $x(p, pw)$ 是 *HOD0* 函数；

2. 满足 *walras* 规则：$pz(p) = 0$，根据 *walras* 规则 $px_i - pw_i = 0$ 加总可得；

3. $z(p)$ 是连续函数；

***Theorem*（一般均衡的存在性）** 如果超额需求满足 1-4 条件，则必然存在竞争均衡满足 $z(p) \leq 0, pz(p) = 0$；如果额外满足条件 5，则竞争均衡时 $z(p) = 0$ 成立[6]。

注意到，*walras* 均衡是存在的，但并不是唯一的，一般而言，在纯交换经济中 *walras* 均衡存在很多。下面，需要给出具体的 *Pareto optimal* 以及契约曲线（*contract curve*）的概念。首先，*Pareto optimal* 表明给定当前的资源配置情况，不存在其他可行的资源配置比现在的情况更优。转换与数学语言即：

[5] 如果不是相交于一点，在必然是某种产品存在过度需求，无法实现竞争均衡。

[6] *Proof*：使用 *Brouwer fixed point theorem* 构造映射关系进行证明。

配置 x 是 *Pareto optimal*，等价于不存在其他可行的配置 x' 使得 $x'_i >_i x_i$ 对于个体 i 而言，其中可行的配置 x' 满足 $x' \in R^L_+, \sum x'_i \leq \sum w_i$。

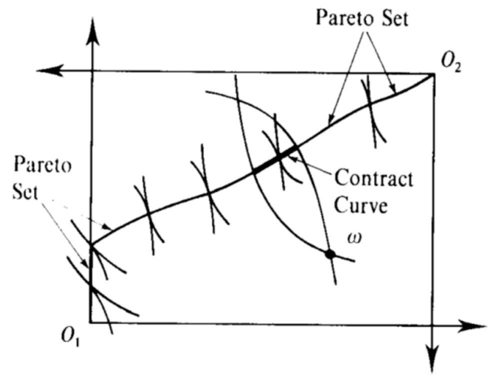
可以从另一个角度理解 *Pareto optimal*：对于两个消费者，给定消费者 B 的效用，最优化消费者 A 的效用，即

$$max_{x_a}\ u_a(x_a)$$
$$s.t.\ u_b(x_b) \geq \bar{u}_b,\ x_a + x_b = w_a + w_b,\ x_a \geq 0$$

对于消费者 B 而言，给定消费者 A 的效用，最优化其效用。均衡情况（内点解时）可以给定为

$$MRS^A_{12} = MRS^B_{12} = p_1/p_2$$

消费者 A 和 B 均实现了效用最大化且满足资源约束，因此 $MRS^A_{12} = MRS^B_{12} = p_1/p_2, x_a + x_b = w_a + w_b$ 给出了纯交换经济中的 *Pareto Set*（*Pareto optimal* 的交换点集合）。但是，考虑到消费者初始的资源禀赋 (w_a, w_b)，交换不能比初始的效用更差，因此需要在 *Pareto Set* 中确定交换经济中可能达到的最优状态。进一步的，定义契约曲线（经济交换的核）：*Pareto Set* 中消费者不劣于初始禀赋情况下的交换点集合。



上图表明：*Pareto set* 是整个经济中所有可行的 *Pareto* 有效交换点的集合，而 *contract curve* 表示考虑消费者禀赋后经济中可以达到的 *Pareto optimal*，也就是交换经济核（镜状区域），只有在该区域中才能达到交换经济的均衡。注意到，在这里没有考虑到角点解的情况，角点解情况下消费者的效用最大化关系不再简单的给定为 $MRS^A_{12} = MRS^B_{12} = p_1/p_2$。简单起见，这里不再进行分析。

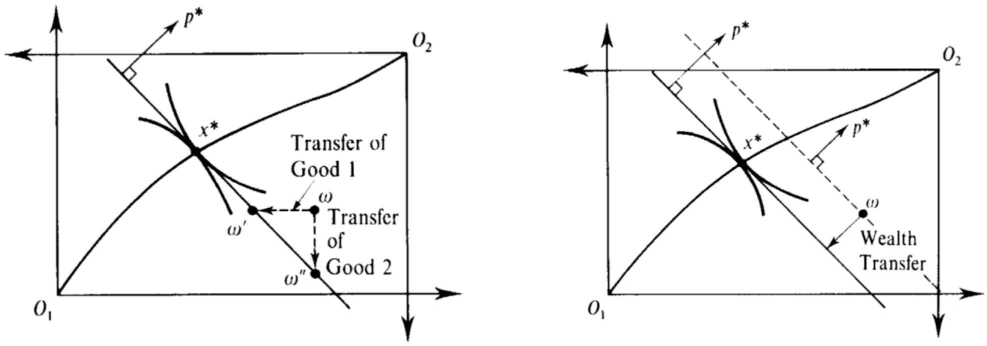
5.2.3 第 I 与第 II 福利定理

给定第 I 福利定理：如果 (x, p) 是 *walras* 均衡，则 x 是 *Pareto Efficient*。

简要证明：假定存在更优的配置 x'，则需要满足 $\sum x'_i = \sum w_i$，且 $px"i' > pw_i$，矛盾。

给定第 II 福利定理：假定 x^* 是 *Pareto* 有效的资源配置；如果偏好满足凸性、连续性以及严格单调的性质，那么 x^* 可以通过市场价格 p^* 与初始禀赋再配置后的 *walras* 均衡实现。这意味着：政府已知某种更优的资源配置状态，可以通过收入分配制度调整，借助市场机制达到更优的均衡状态。一方面，如图2(c)所示，可以直接通过产品的再分配来实现更优配置 x^*，初始资源的再分配形式有很多种，只要在给定的配置路径上便可以达到最终均衡，因而，某种意义上，福利经济学第二定理下的再配置只是说明效率会提高而不存在公平意义上的绝对改善。另一方面，如图2(d)所示，对于人力资本等无法直接分配的产品，可以直接改善初始的财富分配（转移支付）来改善初始禀赋位置，进而实现更优的交换 x^*。

需要注意，第 II 福利定理，偏好的图形是至关重要的；如果说偏好是非凸的，很有可能无法通过市场机制实现更优的 *Pareto optimal*。



5.2.4 *Pareto Optimal and Welfare Analysis*

Pareto optimal 的资源配置与社会福利最大化的资源配置有什么关系呢？如果两者是一致的，那么均衡分析时采用 *Pareto optimal* 是合理有效的，但是如果不是，则需要专门讨论社会福利最大化的资源配置。下面讨论这一问题，假定社会福利是个体效用的线性加总

$$W = \sum_i a_i u_i(x_i), \sum_i a_i = 1$$

其中 a_i 表示社会总福利中个体 i 的权重。给定凹的效用函数假定，则效用可能性边界是凸的。在此基础上，给出 *Pareto optimal* 与社会福利最大化的关系定理：

- 给定权重 a，如果 u^* 是社会福利最优化问题的解，则 u^* 是 *Pareto optimal* 资源配置最优配置下对应的效用函数；这意味着社会福利最优化与 *Pareto optimal* 的效用是相对应的；
- 假定效用可能性边界为凸，任意的 *Pareto optimal* 的效用函数 u 可以被特定的权重 a^* 通过社会福利最优化问题确定；这意味着 *Pareto optimal* 的资源配置等价于社会福利最大化下的资源配置；

上述定理表明：如果资源配置 x^* 满足社会福利最大化，则必然是 *Pareto optimal*；注意到，实际上社会福利最大化（凸偏好假定下）可以通过初始资源再配置的竞争均衡实现。其次，如果资源配置 x^* 是 *Pareto optimal* 的，则必然可以通过某种权重分配 a^* 满足社会福利最大化问题。

Sketch Proof: 给定社会福利最大化问题

$$max_{x_i} \sum a_i u_i(x_i)$$
$$s.t.\ x_a + x_b = w_a + w_b, x_a \geq 0, x_b \geq 0$$

最优性条件满足

$$MRS_{12}^a = MRS_{12}^b = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

其中 μ 为产品价格，这与 *Pareto optimal* 的一阶条件一致，因此两者等价。

进一步的，根据福利经济学第 *II* 定理可知，*Pareto optimal* 的资源配置可以通过竞争均衡实现，即 $\frac{\partial u_i(x_i)}{\partial x_i} = \lambda_i p_l$，与社会福利最大化条件相比，令 $\mu_l = p_l$，则有

$$a_i = \frac{1}{\lambda_i}$$

因此给定特定的权重配置 a，竞争均衡配置 x^* 满足社会福利最大化。

5.2.5 *Summary*

本节定义了纯交换经济中的一般均衡，实质上，一般均衡包括如下两部分：

- *Maximization*：各市场主体的最优化行为；
- *Market Clear*：要素市场与产品市场出清；

一般均衡是如何实现的呢？价格机制在其中扮演了核心作用，各市场主体根据价格（*price taker*）决定其理性的最优化行为，根据市场出清条件进行市场交换，从而形成均衡。

进一步的，在完全竞争市场中均衡与效率、福利存在如下关系：

- 竞争均衡的资源配置总是 *Pareto optimal*；
- *Pareto optimal* 的配置可以通过初始禀赋再分配的竞争均衡实现（假定凸偏好）；
- 社会福利最大化的资源配置总是 *Pareto optimal*；
- *Pareto optimal* 的配置可以通过特定权重的社会福利最大化实现（假定效用函数为凹函数）；

5.3 *Robinson Crusoe Economy*

将生产引入一般均衡分析框架，首先考察最简单的自给自足模型（*Aurtary Economy*）。假定经济中存在单一的消费者，一方面消费者具有效用 $u(l_1, x)$，其中 l_1 表示个体闲暇，x 来自于产品消费；消费者拥有企业，生产产品 x 全部用于消费，生产函数为 $y = f(l_2)$，其中 l_2 为个体的劳动供给，通过供给劳动个体获得收入 w，并用于购买产品 x 用于消费，x 产品价格为 p。

企业最优化问题给定为：

$$max_z \ pf(x) - wz \rightarrow f'(z) = w/p$$

其中 z 表示劳动供给，根据利润最大化可以确定 $z(p, w), q(p, w), \pi(p, w)$。消费者效用最大化问题给定为

$$max_{x_1, x_2} \ u(x_1, x_2), \ px_2 \leq W(\bar{L} - x_1) + \pi(p, w) \rightarrow MRS_{12} = u_1'/u_2' = w/p$$

其中 x_1 表示闲暇，$\bar{L}$ 表示总时间，x_2 表示产品消费。

一般的，对于自给自足经济，可以直接求解效用最大化问题：

$$max_{x_1} \ u(\bar{L} - x_1, f(x_1))$$

上式为关于 x_1 的最优化问题，可以直接确定闲暇时间与劳动供给的配置。需要注意，w/p 可以通过消费者效用最大化或利润最大化一阶条件导出；另外，在求解企业最优化问题时，不能直接根据最优化条件确定劳动供给 z，这是因为公司不会受到 $\bar{L}$ 的直接约束。

5.4 2×2 *Production Model*

5.4.1 *General Setting*

现在考察更为复杂的多产品多生产一般均衡模型。在完全竞争市场中，企业和消费者是价格 p 的接受者，因此在多生产框架下需要考察的基本问题是：要素市场中要素价格如何决定？要素在不同企业间如何进行分配？因此，将多产品多生产引入一般均衡，在完全竞争市场中的关注点转移到要素市场配置。

一般的，给定 J 个企业，每个企业要素投入为 z_j，要素价格为 w，价格 p 外生给定，一般均衡需要确定要素价格与要素配置均衡 $(w^*, z_1, \ldots, z_J)$，企业 j 生产决策给定为

$$max_{z_i} \ p_j f_j(z_j) - wz_j$$

因此一般均衡需要满足

$$
\begin{aligned}
maximium : &p_j \frac{\partial f_j(z_j)}{\partial z_{lj}} = w_l^* \\
clear : \sum_j z_{lj} = \bar{z}_l
\end{aligned}
$$

其中 $\bar{z}_l$ 表示要素 l 的禀赋，求解上述一般均衡可以确定企业生产 $q_j^* = f_j(z_j^*)$。

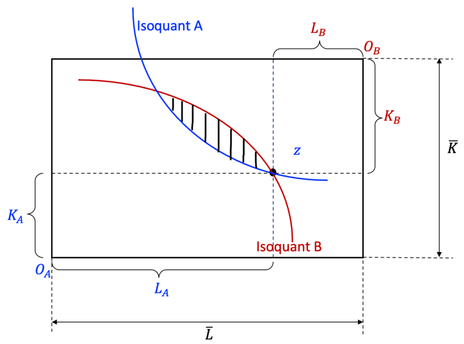
从成本函数的角度出发同样可以得到一般均衡条件：

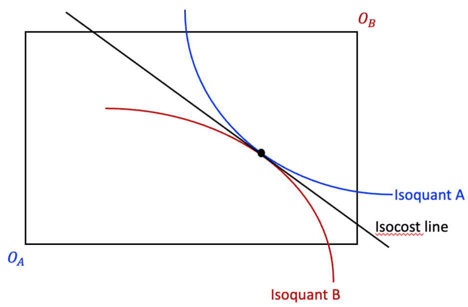
$$
\begin{aligned}
maximium : &p_j = \frac{\partial c_j(w, q_j)}{\partial q_j} \\
clear : \sum_j \frac{\partial c_j(w, q_j)}{\partial w_l} = \bar{z}_l
\end{aligned}
$$

即价格等于产品边际成本，且根据包络引理知要素引致需求等于总要素禀赋（出清）。

简单起见，本节考察两种产品 A 和 B，利用两种要素 L, K（资本和劳动）。假定企业生产函数为 $y_A = f_A(K_A, L_A), y_B = f_B(K_B, L_B)$，满足连续性、二阶可微分以及 CRS 规模报酬不变（重要假设）、单调递增、$Inada$ 条件等性质。要素价格表示为 w, r，产品价格 p_A, p_B 外生给定，要素禀赋为 $\bar{K}, \bar{L}$。

现在可以利用 *edgeworth box* 分析要素市场的资源配置情况。与产品市场的均衡分析类似，要素市场的最优配置表示为等产量线与等成本线相切，此时要素在两个企业间得到最优配置，并据此决定要素相对价格。





为了进一步分析生产的一般均衡，需要区分以下两种情形：一是多样化生产，即企业两种产品都生产；二是专业化生产，即企业只生产单一产品。

5.4.2 *Diversified Production*

在多样化生产中，给定外生产品价格 p_A, p_B 和要素价格 w, r，产品成本函数给定为 $c_A(w, r, y_A), c_B(w, r, y_B)$，即

$$
c_i(w, r, y_i) = min\ wL + rK,\ s.t.\ f(k, l) \geq y_i, i = A, B
$$

厂商利润最大化问题表示为

$$
max_{y_j}\ p_j y_j - c_j(w, r, y_j), j = A, B \rightarrow p_j = \frac{\partial c_j(w^*, r^*, y_j^*)}{\partial y_j}
$$

$$
K_j^* = \frac{\partial c_j(w^*, r^*, y_j^*)}{\partial r_j}, L_j^* = \frac{\partial c_j(w^*, r^*, y_j^*)}{\partial w_j}
$$

一般均衡条件给定为

$$
\begin{gathered}
p_j=\frac{\partial c_j(w^*,r^*,y_j^*)}{\partial y_j},j=A,B \\
\frac{\partial c_A(w^*,r^*,y_j^*)}{\partial w}+\frac{\partial c_B(w^*,r^*,y_j^*)}{\partial w}=\bar{L} \\
\frac{\partial c_A(w^*,r^*,y_j^*)}{\partial r}+\frac{\partial c_B(w^*,r^*,y_j^*)}{\partial r}=\bar{K}
\end{gathered}
$$

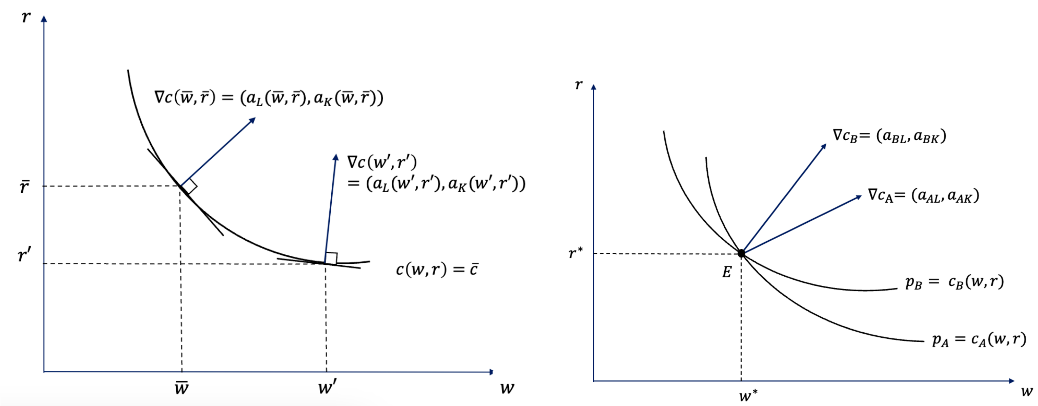
假定规模报酬不变，则成本函数为 *HOD1*，即

$$
c_i(w,r,y_j)=c_j(w,r)y_j
$$

此时一般均衡条件转化为

$$
\begin{gathered}
p_A=c_A(w^*,r^*),p_B=c_B(w^*,r^*) \\
\frac{\partial c_A(w^*,r^*)}{\partial w}y_A^*+\frac{\partial c_B(w^*,r^*)}{\partial w}y_B^*=\bar{L} \\
\frac{\partial c_A(w^*,r^*}{\partial r}y_A^*+\frac{\partial c_B(w^*,r^*)}{\partial r}y_B^*=\bar{K}
\end{gathered}
$$

等式 1 可以确定要素价格 (w^*,r^*)，等式 2 和 3 可以进一步确定 (y_A^*,y_B^*)，从而可以确定一般均衡下的要素市场配置情况。



左图给出了单位成本曲线的形状，任意点处成本梯度表示两种要素的需求函数。右图给出了均衡的要素配置情况，即产品 A 和产品 B 的 $p=c(w,r)$ 曲线相交点 E。

进一步的，引入**要素密集度（*factor intensity*）**的概念：首先定义不同行业的要素需求

$$
a_{jL}=\frac{\partial c_j(w,r)}{\partial w},a_{jk}=\frac{\partial c_j(w,r)}{\partial r},j=A,B
$$

定义：产品 B 相比于产品 A 资本密集度更高等价于

$$
\frac{a_{BK}(w,r)}{a_{BL}(w,r)}>\frac{a_{AK}(w,r)}{a_{AL}(w,r)}
$$

其经济含义就是均衡时产品 B 的资本劳动比大于产品 A 的资本劳动比，因而相比于 A，产品 B 具有更高的资本密集度。在单位成本曲线图中，任意点的曲线斜率表示为该点处的 K^*/L^*（资本劳动比），可知产品 B 的曲线更为平坦，因而产品 B 具有更高的资本密集度，产品 A 具有更高的劳动密集度。进一步的，要求不存在要素密集度逆转，这意味着产品 B 的单位成本曲线始终要比产品 A 的平坦，两者仅有一个交点 E。

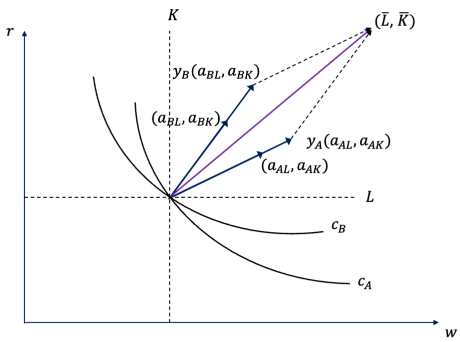
定义要素需求后，一般均衡可以简化为

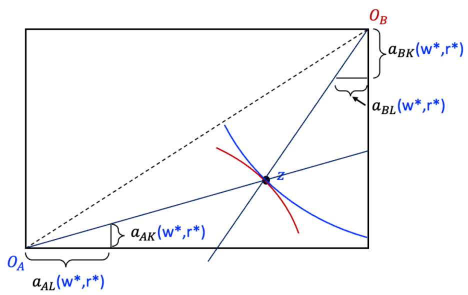
$$a_{AL}y_A^* + a_{BL}y_B^* = \bar{L}$$
$$a_{AK}y_A^* + a_{BK}y_B^* = \bar{K}$$

均衡点处的资本劳动比等价于

$$\frac{K_A^*}{L_A^*} = \frac{a_{AK}(w^*, r^*)}{a_{AL}(w^*, r^*)}, \frac{K_B^*}{L_B^*} = \frac{a_{BK}(w^*, r^*)}{a_{BL}(w^*, r^*)}$$

在单位曲线图中知道均衡点处的梯度向量代表了对于两种要素的需求，因此根据矢量相加可以确定资源禀赋 $(\bar{K}, \bar{L})$。*Edgeworth box* 中均衡点 Z 表示两种要素的需求满足等产量线相切，同时满足要素禀赋约束。



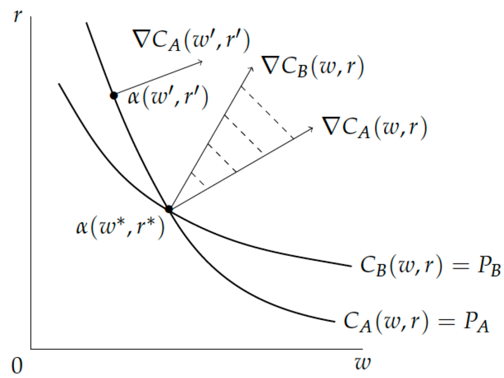


5.4.3 多样化锥 *Diversified Cone*

一个自然的问题是，区分多样化生产和专业化生产的依据是什么？企业在何种情况下会选择多样化生产？答案在于：禀赋水平决定了到底从事专业化生产还是从事多样化生产，资源禀赋表示为

$$[\triangledown c_A(w, r)', \triangledown_B(w, r)'] \begin{bmatrix} y_A \\ y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{L} \\ \bar{K} \end{bmatrix}$$

如果企业从事多样化生产，产量 y_A, y_B 必然非负；相应的如果产出 y_A, y_B 非正则意味着企业应该从事专业化生产，而这取决于经济中的禀赋资源。在图形中，如果禀赋位于多样化锥内，则企业将会从事多样化生产，反之在多样化锥以外则从事专业化生产。



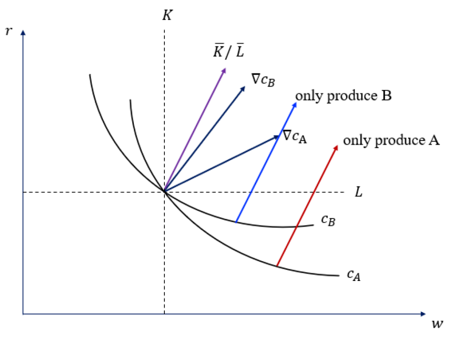
5.4.4 *Specified Production*

当禀赋 $(\bar{K}, \bar{L})$ 落在多样化锥的外侧时，此时进行专业化生产，即每个企业只生产单一产品。假定不存在要素密集度反转（*reversal*），当产品价格低于生产的边际成本时出现专业化生产，假定只有 A 产品被生产出来，则一般均衡重新表示为

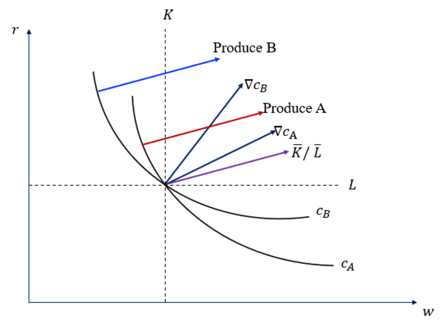
$$p_A = c_A(w, r), p_B < c_B(w, r)$$
$$\nabla c_A(w, r) y_A^* = (\bar{K}, \bar{L}), y_B^* = 0$$

其中产品 B 的市场价格低于边际成本，因为最优生产决策下不生产产品 B，专业化生产产品 A。一个自然的问题就是何种情况下生产产品 A，何种情况下生产产品 B。假定产品 A 是劳动密集产品，产品 B 是资本密集产品，分两种情况讨论不同禀赋情况下的专业化生产：

- 资本-劳动比较高 $\bar{K}/\bar{L}$，专业化均衡下生产资本密集度高的产品 B；
- 资本-劳动比较低 $\bar{K}/\bar{L}$，专业化均衡下生产劳动密集度高的产品 A；



(k) Capital Intensive



(l) Labor Intensive

接下来，对于专业化均衡进行比较静态分析，主要考察两方面：一是产品市场价格发生变化的影响；二是要素禀赋发生变化的影响。

对于产品价格变化，给出 ***Stolper-Samuelson Theorem*（*SS* 定理）**：

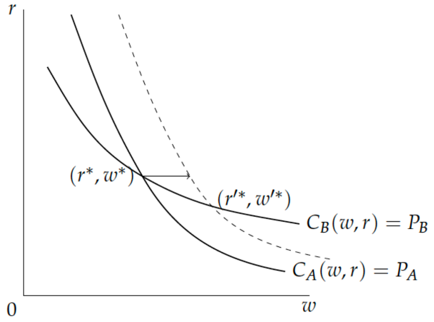
> 在 2×2 中，假定存在多样化均衡，如果产品 j 的市场价格 p_j 上升，则生产 j 所密集使用的要素价格上升，相应的非密集使用的要素价格下降。

例如，对于劳动密集型产品（左图），产品价格 p_A 上升导致等成本曲线 $p_A = c_A$ 右移进而导致劳动力价格上升而资本价格下降；相应的，对于资本密集型产品（右图，产品价格 p_B 上升导致等成本曲线 $p_B = c_B$ 右移进而导致资本价格上升而劳动力价格降低。图示中，资本劳动比更高（资本密集型）产品的等成本曲线更加平坦（如 B 所示）。

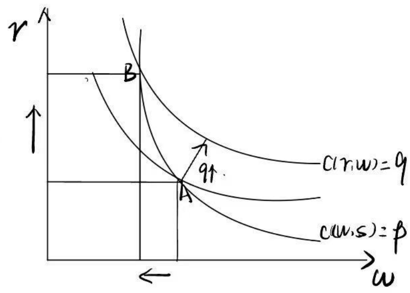
对于要素禀赋变化，给出 ***Rybcszynski Theorem***：

> 在 2×2 中，假定存在多样化均衡，如果要素禀赋提升，则密集使用该要素的产品产量提高，相应的非密集使用该要素的产品产量降低。

例如，如果劳动力要素禀赋增多，相应的密集使用劳动力禀赋的产品 A 产量提高，而非密集使用劳动力禀赋的产品 B 产量降低。



(m) Labor Intensive



(n) Capital Intensive

5.5 *Conclusion*

本部分依次给出了均衡与效率的概念。首先以局部均衡为基础，讨论了局部市场均衡条件（个体最优化与出清条件）以及局部均衡中的 *Pareto optimal*，并进一步分析了社会福利问题（马歇尔总剩余）。在此基础上，将一般均衡引入分析。首先考察纯交换经济中的一般均衡，重点分析产品市场（产品市场的 *edgeworth box*），纯交换经济的一般均衡表示为个体最优化与资源禀赋约束的均衡。根据福利经济学定理，*walras* 均衡必然是 *Pareto optimal*，而 *Pareto optimal* 可以相应的转化为某种再分配初始禀赋所对应的竞争均衡。在纯交换经济中，进一步建立了 *Pareto optimal* 与社会福利最大化的关系，即社会福利最大化的资源配置必然对应 *Pareto optimal*，而 *Pareto optimal* 的资源配置等价于特定权重下社会福利最大化的结果。基于此，论证了均衡与福利的关系，因此求解均衡就是在求解 *Pareto optimal* 和社会福利最大化。

进一步的，将生产引入一般均衡框架。首先考察自给自足的鲁滨孙模型，个体一方面供给劳动一方面获得收入，消费其所生产的产品。其次，引入多产品多生产的一般均衡模型，重点分析要素市场（要素市场的 *edgeworth box*）以 2 产品为例，区分专业化均衡与多样化均衡。经济中的禀赋密集度决定了实际经济中从事专业化生产还是多样化生产，如果初始禀赋位于多样化锥内，企业从事多样化生产；如果在多样化锥外，初始禀赋中资本密集度高则生产资本密集度高的产品，反之亦然。在多样化生产中，产品价格上升意味着该产品密集使用的要素价格上升，非密集使用的要素价格降低；要素禀赋上升意味着密集使用该要素的产品产量增加，非密集使用该要素的产品产量降低。

6 *Externalities*

之前的分析完全建立在完全竞争市场中，此时竞争均衡是 *Pareto* 有效的；但是在不完全市场、不完全信息以及外部性等情况下，竞争均衡不再是 *Pareto* 有效的，此时私人竞争均衡与计划者最优结果不一致，导致诸多市场失灵问题。本节主要讨论四种情况：外部性、公共产品、公共资源以及社会互动（*social interaction*）。

6.1 *Externalities*

外部性被广义的定义为单个个体行为对于其他个体行为产生影响的情形；一般而言，负外部性面临供给过度的问题，而正外部性则面临供给不足的问题。我们利用双边外部性模型给出一般性的理论解释。

假定存在两个个体 $i = 1, 2$，均为价格接受者，个体拥有财富 w_i，同时个体的效用函数定义为

$$w_i(x_i, h)$$

其中 h 表示个体 1 的行为，如果 $\partial u_2/\partial h \neq 0$，表明个体 1 的行为对于个体 2 具有外部性。进一步的，假定个体具有拟线性的效用函数

$$u_i(x_i, h) = g_i(x_{i,-h} + x_{i1})$$

其中 $x_{i,-1}$ 表示出了产品 1 之外的其他产品。求解效用最大化问题，间接效用函数给定为

$$\begin{aligned} &v_i(p, x_i, h) = max\ g_i(x_{i,-1}, h) + x_i,\ s.t.\ px_{i,-1} + x_{i1} = w_i \\ \to &v_i(p, w_i, h) = \phi_i(p, h) + w_i \end{aligned}$$

其中 $\phi(p, h) = g_i(p, w_i, h) - px_{i,-1}(p, h)$，假定 $\phi' > 0, \phi'' < 0$。

对于个体 1 而言，最优化其自身效用表示为

$$v_1(p, w_i, h) = \phi_i(p, h) + w_1 \to \frac{\partial \phi_1}{\partial h^*} = 0$$

此时个体 1 最优化的行为供应为 h^*。相应的，我们考察社会福利最大化，即个体 1 和 2 的效用之和最大化

$$max_h\ \phi_i(p, h) + w_1 + \phi_2(p, h) + w_2 \to \frac{\partial \phi_1}{\partial h} = -\frac{\partial \phi_2}{\partial h}$$

社会最优下个体 1 的行为供应为 h^0。这意味着如果 $\partial u_2/\partial h \neq 0$，从而 $\partial \phi_2/\partial h \neq 0$，则个体最优与社会最优存在差异。如果存在负外部性，即 $\frac{\partial \phi_2}{\partial h} < 0$，则 $h^* > h^0$，即个体最优决策超过社会最优，因此负外部性下个体决策导致行为过度供应。如果存在正外部性，即 $\frac{\partial \phi_2}{\partial h} > 0$，则 $h^* < h^0$，即正外部性下个体决策导致行为供应不足。

6.1.1 *Quotes and Taxes*

假定个体 1 行为存在负外部性，即 $h^* > h^0$，行为供应过度，可以采用如下两种形式实现社会最优的供给水平。一是配额，即政府将个体 1 的行为严格限定在 h^0，令其等价于社会最优的供给水平。

更为常见的方式是征收庇古税（*Pigouvian Taxation*）。假定我们对于个体 1 的行为 h 征收税率 t_h，相应的个体 1 最优化行为表示为

$$v_1(p, j) = \phi_1(p, h) + w_1 - t_h h \to \phi_1'(p, h) = t_h$$

上述给出了庇古税税率设定形式，为了达到社会最优，令 $h = h^0$，因此庇古税税率为 $t_h = \phi'(h^0)$；或者令 $t_h = -\phi_2'(h)$，相应的 $h^* = h_0$。如果存在正外部性，即 $t_h = -\phi_2'(h) < 0$，此时需要对个体 1 的行为进行补贴。

需要注意，庇古税需要对行为本身直接征税，而不能通过间接方法。例如对于企业污染需要直接对企业污染征收税收，但是如果通过对企业查出征收税收可能并不会影响污染水平，这是因为污染和产出关系往往是非线性的复杂关系，所以针对行为直接征收税收是最优的。一般而言，政府征收税收或配额都需要事先知道最优配置，但是在信息不完全的情况下，这是不太现实的。

6.1.2 *Enforceable Property Rights*

首先给出 ***Coase theorem***：

> *如果产权明晰且可以市场不存在交易成本，则不论产权归属于谁，市场配置都是有效的。*

科斯定理意味着：给定产权明晰且交易成本为零的市场，可以实现社会最优水平；同时，科斯定理指出，无论产权归属于谁都可以实现社会最优，这是一种效率概念而不涉及公平概念。产权安排可以包括两种形式：总量许可和产权单位交易。

假定个体 2 拥有行为 h 的产权，则个体 1 需要向 2 购买产权 T 从而实现行为 h，对于个体 1 而言满足参与约束

$$\phi(h) + w_1 - T \geq \phi_1(0) + w_1$$

给定个体 1 的行为，个体 2 最优化效用函数

$$v_2(p, h) = \phi_2(h) + w_2 + T,\ s.t.\ \phi_1(h) - T \geq phi_1(0)$$

约束收紧表明最优产权交易 $T = \phi(h^0) - \phi(0) > 0$，个体 1 向个体 2 支付 T，市场中个体 1 的行为达到最优水平 h^0。

假定个体 1 拥有行为 h 的产权，则个体 2 需要向个体 1 购买产权 T 从而降低 h 的供给，对于个体 1 而言满足交易后效用大于交易前 h^* 的最优效用

$$\phi_1(h) + T \geq \phi_1(h^*)$$

对于个体 2 效用最大化表示为

$$v_2(p, h) = \phi_2(h) + \phi_1(h) - \phi_1(h^*)$$

为了达到最优化水平 h^0，个体 2 需要向个体 1 支付 $T = \phi_1(h^*) - \phi_1(h^0) > 0$。上述两种情况下都可以通过产权交易实现社会最优，但是显然两种情况下的公平程度是完全不同的。

假定个体 2 拥有行为产权，每单位行为 h 交易价格为 p_h，相应的个体 1 最优化表示为

$$v_1(p, h) = \phi_1(h) - p_h h_1 \to \phi_1'(h_1) = p_h$$

对于个体 2 最优化表示为

$$v_2(p, h) = \phi_2(h) + p_h h_2 \to \phi_2'(h_2) = -p_h$$

在竞争均衡下可以得到令个体 1 行为等于社会最优水平 h^0：

$$\phi_1'(h^0) = p_h = -\phi_2'(h^0)$$

6.2 *Public Goods*

公共物品被定义为非竞争性和非排他性的物品，例如国防军事等。公共物品的问题就是私人供应过少（存在正外部性）以及搭便车（*free-rider*）问题。

6.2.1 公共物品搭便车问题

假定存在 N 个消费者，每个个体消费公共品 x，同时假定个体效用函数为 $v_i(x) = \phi_i(x) + m_i, \phi' > 0, \phi'' < 0$，个体具有禀赋 w_i，公共物品供应成本为 $c(q)$ $c' > 0, c'' > 0$。

首先考虑社会最优的公共品供给问题：给定社会最优的加总效用最大化问题

$$\begin{aligned} max_x \ & \sum_i \phi_i(x) + \sum_i m_i \\ s.t. \ & \sum_i m_i + c_i = \sum_i w_i \\ \rightarrow & \sum_i \phi_i'(x^0) = c'(x^0) \end{aligned}$$

此时供应公共品的社会边际收益等于社会边际成本，相应的最优供应为 x^0。

接下来考察私人竞争均衡下的公共品供应与消费问题。假定公共品总消费为 $x = \sum_i x_i$，相应的个体最优化决策表示为

$$\begin{aligned} & max_{x_i} \ \phi_i(x_1 + \sum_{k \neq i} x_k) + m_i \\ & s.t. \ m_i + px_i = w_i \\ & \rightarrow \phi_i'(x_1 + \sum_{k \neq i} x_k) = p, \ x_i > 0 \end{aligned}$$

其中 $\sum_{k \neq i} x_k$ 除个体 i 以外的其他个体消费。对于企业而言，利润最大化表示为

$$max_q \ pq - c(q) \rightarrow p = c'(q), \ q > 0$$

市场出清给定为 $x^* = q^*$，因此可知

- 对于购买公共品的个体：$\phi_i'(x_i^* + \sum_{k \neq i} x_k^*) = p = c'(x^*)$；
- 对于未购买公共品的个体：$\phi_i'(x_i^* + \sum_{k \neq i} x_k^*) < p = c'(x^*)$；

对于至少 1 个个体购买公共品时，可以得到

$$\sum_i \phi_i'(x^*) > c'(x^*) \rightarrow x^* < x^0$$

这意味着私人竞争均衡的公共品供应小于最优的社会供应水平，出现了供给不足问题。供给不足的原因是因为在公共品消费中存在的有效需求不足，即愿意支付公共品的个体不足。给定消费者公共产品消费的边际收益 $\phi_1'(x) < \cdots < \phi_N'(x)$，此时只有消费者 N 购买公共品，其他消费者购买公共品的收益小于 p，即

$$\phi_{N-1}'(x) < \phi_N'(x) = p$$

这意味着只有边际收益最大的个体会支付公共品（只有购买收益最大的人购买，其余人全部搭便车），此时公共品价格等于其边际效用，其他低边际收益的个体不会支付公共品消费，成为搭便车者。因此，公共物品下的竞争均衡和社会最优分别给定为

- 竞争均衡：$\phi_N'(x^*) = p = c'(x^*)$；
- 社会最优：$\sum_i \phi_i'(x^0) = c'(x^0)$，这意味着 $x^* < x^0$，供给不足且存在低边际收益人群的搭便车问题；

6.2.2 *Tax and Subsidy*

如果政府具有完全信息，最简单的可以直接供给 x^0 单位的公共产品。下面，我们考虑政府对私人的补贴以实现社会最优，给定对于私人单位公共产品消费的补贴

$$s_i = \sum_{k \neq i} \phi'_k(x^0)$$

定义其他消费者竞争均衡的消费水平为 x^*_k，消费者 i 的公共品消费为 x^*_i

$$\begin{aligned} &max_{x_1}\ \phi_i(x_i + \sum_{k \neq i} x^*_k) + w_i - p^* x_i + s_i x_i \\ &\rightarrow \phi'_i(x^*_i + \sum_{k \neq i} x^*_k) + \sum_{k \neq i} \phi'_i(x^0) = p^*,\ x^*_i > 0 \end{aligned}$$

给定企业最优化和市场出清条件可以得到

$$\phi'_i(x^*) + \sum_{k \neq i} \phi'_k(x^0) = c'(x^*)$$

其中 x^* 表示竞争均衡消费，x^0 表示社会最优水平。同时，社会最优的供应水平表示为

$$\sum_i \phi'_i(x^0) = c'(x^0)$$

因此给定补贴 s_i，竞争均衡下可以得到 $x^* = x^0$，从而实现社会最优水平。

6.2.3 *Personalized Market: Lindahl Equilibria*

补贴和政府公共支出的方式要求政府拥有市场的完全信息，这并不现实。林达尔定价给出了公共物品的一种私有化方式：即假定消费者可以消费私有化的公共产品，当消费者消费 x_i，则其他消费者被完全排除，从而避免搭便车问题。这种私有化的方式实际上是将公共产品的外部性利用内部化的方式处理为私人消费，从而实现最优。

假定消费者 i 购买 x_i 的私有化公共产品，最优化表示为

$$\phi'_i(x_i) = p_i,\ x_i > 0$$

企业最优化给定为

$$\sum p_i = c'(q)$$

给定市场出清条件 $x_i = q$，则相应的均衡表示为

$$\sum \phi'_i(x_i) = c'(x)$$

其中 x_i 表示私人化公共品消费，社会最优的供应水平表示为

$$\sum_i \phi'_i(x^0) = c'(x^0)$$

这意味着 $x = x^0$，林达尔定价实现了社会最优水平。

注意到，搭便车问题的存在是因为在公共品市场中边际收益最高者支付价格，其余个体不支付价格；私有化市场则意味着个体如果想要消费必须进行支付，而无法从其他人的消费中获益，因此能够避免外部性导致的供给不足问题。当然，林达尔定价高度依赖于私有化市场排他性的程度，如果能够完全排他，则意味着可以实现社会最优。

6.3 *Common Resource*

公共资源定义为非排他但是具有竞争性的物品，正是因为其竞争性，这意味着个体 i 消费增加必然会导致其他个体消费减少（负外部性），因此必然会出现过度使用的问题，即公地悲剧。

6.3.1 *Tragedy of Common Resource*

我们以捕鱼为例，假定存在鱼池，k 条捕鱼船可以获得 $f(k)$ 的捕鱼量，假定 $f'>0, f''<0, f(k)/k > f'(k)$，每条捕鱼船价格为 p，每单位鱼价值 1，社会最优的捕鱼船为

$$max_k\ f(k) - pk \rightarrow f'(k^0) = p$$

现在假定所有人可以自由进出鱼塘，N 个渔民，其中 k_i 表示渔民 i 拥有的渔船数，$k = \sum_i k_i$，假定所有渔船的捕鱼量相同，每个渔民的最优化问题给定为

$$max_{k_1}\ \frac{k_i}{k_i + k_{-i}} f(k) - pk_i$$

其中 $k_{-1} = \sum_{j \neq i} k_j$ 表示其他渔民的渔船数。最优化条件下可以得到 $k_i^* = k_j^*$

$$f'(k^*)\frac{1}{N} + \frac{f(k^*)}{k^*}\frac{N-1}{N} = p$$

其中，第一项表示渔民增加渔船进而增加捕鱼量中所获得的收益份额，第二项表示渔民增加渔船从其他渔民手中抢过的份额，即经济意义在于渔民增加渔船的收益来自于两部分：一是扩大捕鱼规模，二是抢占市场份额。

给定 $f(k)/k > f'(k)$，这意味着

$$p = f'(k^*)\frac{1}{N} + \frac{f(k^*)}{k^*}\frac{N-1}{N} > f'(k^*)\frac{1}{N} + f'(k^*)\frac{N-1}{N} = f'(k^*)$$

社会最优条件满足 $f'(k^0) = p$，则意味着 $k^* > k^0$，即存在过度捕捞问题。

6.3.2 *Solution to Common Overuse*

对于公共资源过度使用问题，政府可以提供配额等于社会最优水平，也可以加征税收，或者将公共资源私有化（明确产权或提供交易市场）。

对于政府税收，最优的税率给定为

$$t^* = \frac{k_{-i}^*}{k^*}[\frac{f(k^*)}{k^*} - f'(k^*)]$$

因此渔民的最优化问题给定为

$$max_{k_i}\ \frac{k_i}{k_i + k_{-i}} f(k) - pk_i - t^* k_i \rightarrow f'(k^*) = p$$

考虑到社会最优时存在 $f'(k^0) = p$，因此 $k^* = k^0$，每个渔民拥有船 $k_i = k^0/N$。

7 *Reference*

1. *Qi Wu, Lecture Notes On Graduate Level Microeconomic Theory I, GSM, 2023.*

2. *Andreu Mas-Collel, Michael D. Whinston, Jerry R. Green, Microeconomic Theory, Oxford University Press, 1995.*

3. *Andreu Mas-Collel, Michael D. Whinston, Jerry R. Green,* 微观经济理论（上册）, 中国人民大学出版社, *2013.*

4. *A Course in Microeconomic Theory by David Kreps, Princeton University Press, 1990.*

5. *Microeconomic Analysis by Hal Varian, Third Edition, W.W. Norton & Co., 1992.*

6. *Lecture Notes in Microeconomic Theory by Ariel Rubinstein.*