高级宏观经济学 I

Based on lectures by Gong Liutang(GSM)

Wang Bencheng

Department of Applied Economics, GSM

2024 年 1 月 12 日

目录

1 *From Static IS-LM to Generalized Dynamic IS-LM*

宏观经济首先需要明确经济中的内生变量和外生变量：

内生变量：$Y, C, I, L, NX, P, r, w, e$；上述内生变量需要通过模型中的外生变量和参数给出；

外生变量：财政政策 G, t，货币政策 M，贸易政策、其他国家的财政货币政策等，外生给定并作用于内生变量（比较静态分析）；

具体而言，宏观经济中的变量关系需要界定如下：内生变量 Y, C, I, L, NX 的决定及其价格系统 P, r, w, e 的决定是宏观研究的核心；只有一般均衡下的 *IS-LM* 模型给出了所有 9 个内生变量的同时决定，其余模型只能部分决定内生变量。宏观经济是变量相互决定的复杂系统，一是需要明确经济中的内生变量和外生变量，二是确定经济中的均衡转态，三是确定政策作用渠道与租用效果。**宏观经济的核心变量是：产出水平 Y、就业 L 和通胀水平 $P(\pi)$**。任何的宏观经济模型分析都应该首先明确核心假设，同时明确模型中的内生变量、外生变量与核心参数，从而有针对性的进行比较静态分析。

1.1 封闭经济的 *IS-LM* 模型

给定封闭经济下的 *IS-LM* 模型 (*Hicks,1929ECMA*)：

$$IS : Y = C(Y - T) + I(r) + G \tag{1.1}$$

$$LM : \frac{M}{P} = m(r, Y) \tag{1.2}$$

IS 曲线给定产品市场的均衡，*LM* 曲线给定货币市场的均衡（货币供给 $\frac{M}{P}$ 等于货币需求 $m(r, Y)$），给定一般均衡的 *Walras* 规则，劳动力市场自发均衡。模型各组成部分设定如下：（1）消费函数：$C(\cdot)$ 表示 *Keynesian* 消费函数，$C' \in (0, 1), C'' < 0$，消费函数为凹（边际消费倾向递减）；[1]消费函数是关于可支配收入 $Y - T$ 的函数，关于此部分的讨论可参考 *Sargent MT*。（2）投资函数：*Keynesian* 投资函数只考虑了利率的作用渠道，投资是实际利率的减函数；实际上考虑 *Tobin* 的 Q 理论，投资是利率、通胀、折旧率等系列因素的总和结果；（3）货币需求函数：$m_y > 0, m_r < 0$，高收入导致高货币需求，高利率导致高货币持有成本，进而导致低货币需求。

市场均衡：*IS* 曲线给定了产品市场均衡，*LM* 曲线给定了货币市场均衡；假定劳动力市场均衡，根据 *walras* 规则，产品和劳动市场均衡，资本市场自发均衡，该一般均衡框架决定了价格体系 P, w, r。进一步的，为什么我们能够利用货币市场均衡代替资本市场均衡呢？考虑资本市场 $A = K + B/P + M/P$，即资本市场由股票、债券和货币构成；给定资本市场均衡，将股票和债券市场看做单一市场，如果货币市场均衡，那么股票和债券市场也是均衡的，因而可以利用货币市场均衡代替资本市场均衡。

在 *IS-LM* 模型中，**内生变量是** Y, P, r**，外生变量是** M, T, G；但是两个均衡方程如何求解三个内生变量？必须要假定一个内生变量是外生的，从而分析其余两种情况下的内生决定，因而 *IS-LM* 实际代表了三种不同的分析框架，分别是：P 给定（价格粘性）、r 给定和 Y 给定的均衡模型：（1）给定 Y，内生决定 (r, P)；*Say* 框架下供给决定需求的分析框架；（2）给定 r，内生决定 (Y, P)；世界利率给定框架下的产出与价格决定分析；（3）给定 P，内生决定 (r, Y)；假定价格具有粘性的短期 *IS-LM* 分析框架；

计划经济的非均衡状态：计划经济中 Y, r, P 三者同时外生给定，*IS-LM* 很容易不均衡[2]，因而计划经济往往存在处于非均衡状态，要么是过剩要么是短缺；

[1]消费函数为凹的严格证明尚未给出；*Carrod and Lcimbell,1996; Gong et.al,2006EL* 给出了消费函数凹性的部分证明。

[2]厉以宁关于非均衡的中国经济的研究：经济处在非均衡状态，本该市场内生决定的变量被计划和行政手段外生决定导致系统非均衡。

1.1.1 P 固定，r,Y 内生情形

P 固定，r,Y 内生，此时回归传统的凯恩斯短期价格粘性的 *IS-LM* 分析框架，给定 *IS-LM* 全微分形式[3]：

$$dY = c'(dY - dT) + I'dr + dG \tag{1.3}$$

$$\frac{1}{P}dM - \frac{M}{P^2}dP = L_r dr + L_Y dY \tag{1.4}$$

$$\begin{bmatrix} 1-c' & -I' \\ L_Y & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dY \\ dr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dG - c'dT \\ \frac{1}{P}dM - \frac{M}{P^2}dP \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

下面分别考察财政支出 G、税收 T、货币政策 M 以及外生价格 P 变化对于经济的影响[4]：

$$\textit{the effect of } G \qquad \begin{pmatrix} 1-C' & -I' \\ L_Y & L_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dY}{dG} \\ \frac{dr}{dG} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dY}{dG} = \frac{L_r}{(1-C')L_r + I'L_Y} > 0 \\ \frac{dr}{dG} = \frac{-L_Y}{(1-C')L_r + I'L_Y} > 0 \end{cases}$$

$$\textit{the effect of } T \qquad \begin{pmatrix} 1-C' & -I' \\ L_Y & L_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dY}{dT} \\ \frac{dr}{dT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C' \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dY}{dT} = \frac{-C'L_r}{(1-C')L_r + I'L_Y} < 0 \\ \frac{dr}{dT} = \frac{C'L_Y}{(1-C')L_r + I'L_Y} < 0 \end{cases}$$

$$\textit{the effect of } M \qquad \begin{pmatrix} 1-C' & -I' \\ L_Y & L_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dY}{dM} \\ \frac{dr}{dM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{P} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dY}{dM} = \frac{I'/P}{(1-C')L_r + I'L_Y} > 0 \\ \frac{dr}{dM} = \frac{(1-C')/P}{(1-C')L_r + I'L_Y} < 0 \end{cases}$$

$$\textit{the effect of } P \qquad \begin{pmatrix} 1-C' & -I' \\ L_Y & L_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dY}{dP} \\ \frac{dr}{dP} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{M}{P^2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dY}{dP} = \frac{-I'M/P^2}{(1-C')L_r + I'L_Y} < 0 \\ \frac{dr}{dP} = \frac{-(1-C')M/P^2}{(1-C')L_r + I'L_Y} > 0 \end{cases}$$

首先，财政支出增加会导致产出水平提高，利率水平提高，从而对于投资产生挤出效应；其次，税收增加导致产出水平降低并且压低利率水平；第三，货币扩张导致产出水平提高，同时压低利率水平；最后，外生价格提高导致产出水平降低和利率水平提高。上述分析可以借助 *IS-LM* 曲线进行分析，其中外生价格提高不会影响 *IS* 曲线，但是价格提高意味着实际货币供给降低，*LM* 曲线左移，从而导致产出降低和利率提高。

1.1.2 r 固定，P,Y 内生情形

r 固定，P,Y 内生，利率水平外生固定，经济系统自发决定价格水平与产出水平；下面分别考察财政支出 G、税收 T、货币政策 M 以及外生利率 r 变化对于经济的影响：

$$\begin{pmatrix} 1-C' & 0 \\ L_Y & \frac{M}{P^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dY \\ dP \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C'dT + I'dr + dG \\ \frac{1}{P}dM - L_r dr \end{pmatrix}$$

$$\textit{the effect of } G \qquad \begin{pmatrix} 1-C' & 0 \\ L_Y & \frac{M}{P^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dY}{dG} \\ \frac{dP}{dG} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dY}{dG} = \frac{M/P^2}{(1-C')M/P^2} = \frac{1}{1-C'} > 0 \\ \frac{dP}{dG} = \frac{-L_Y}{(1-C')M/P^2} < 0 \end{cases}$$

$$\textit{the effect of } T \qquad \begin{pmatrix} 1-C' & 0 \\ L_Y & \frac{M}{P^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dY}{dT} \\ \frac{dP}{dT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C' \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dY}{dT} = \frac{-C'M/P^2}{(1-C')M/P^2} = \frac{-C'}{1-C'} < 0 \\ \frac{dP}{dT} = \frac{C'L_Y}{(1-C')M/P^2} > 0 \end{cases}$$

$$\textit{the effect of } M \qquad \begin{pmatrix} 1-C' & 0 \\ L_Y & \frac{M}{P^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dY}{dM} \\ \frac{dP}{dM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{P} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dY}{dM} = \frac{0}{(1-C')M/P^2} = 0 \\ \frac{dP}{dM} = \frac{(1-C')/P}{(1-C')M/P^2} = \frac{P}{M} > 0 \end{cases}$$

$$\textit{the effect of } r \qquad \begin{pmatrix} 1-C' & 0 \\ L_Y & \frac{M}{P^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dY}{dr} \\ \frac{dP}{dr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I' \\ -L_r \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dY}{dr} = \frac{I'M/P^2}{(1-C')M/P^2} = \frac{I'}{1-C'} < 0 \\ \frac{dP}{dr} = \frac{-(1-C')L_r - I'L_Y}{(1-C')M/P^2} > 0 \end{cases}$$

[3] 首先确定内生变量，将非内生变量放到关系式另一侧；系数矩阵、内生变量与参数矩阵的关系，利用线性代数克莱默法则求解参数的比较静态效应。

[4] 注：在这里 L 函数和 m 函数一致，表示货币需求函数。

在 P-Y 平面上，*IS* 曲线垂直于 Y 轴（与价格 P 无关），*LM* 曲线向下倾斜。首先，财政支出增加导致产出水平提高而价格水平降低，*IS* 曲线右移从而导致产出扩张，价格下降；其次，税收扩张相应的导致产出水平降低而价格水平提高；第三，货币扩张导致产出水平不变同时价格水平提高，这是因为 *LM* 曲线左移而 *IS* 曲线不移动，产出水平不变，价格水平提高；最后，外生利率水平提高会导致投资降低，*IS* 曲线左移，同时货币需求降低，相应的实际货币供给[5]提高，*LM* 右移，两者共同导致产出降低而价格提高。

1.1.3 Y 固定，r,Y 内生情形

Y 固定，P,r 内生，产出水平外生固定，经济系统自发决定利率水平与产出水平，回归长期古典分析框架；下面分别考察财政支出 G、税收 T、货币政策 M 以及外生产出水平 Y 变化对于经济的影响：

$$\begin{pmatrix} I' & 0 \\ L_r & \frac{M}{P^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dr \\ dP \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-C')dY + C'dT - dG \\ \frac{1}{P}dM - L_Y dY \end{pmatrix}$$

$$\textit{the effect of } G \qquad \begin{pmatrix} I' & 0 \\ L_r & \frac{M}{P^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{dr}{dG} \\ \frac{dP}{dG} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dr}{dG} = \frac{-M/P^2}{I'M/P^2} = \frac{-1}{I'} > 0 \\ \frac{dP}{dG} = \frac{L_r}{I'M/P^2} > 0 \end{cases}$$

$$\textit{the effect of } T \qquad \begin{pmatrix} I' & 0 \\ L_r & \frac{M}{P^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{dr}{dT} \\ \frac{dP}{dT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C' \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dr}{dT} = \frac{C'M/P^2}{I'M/P^2} = \frac{C'}{I'} < 0 \\ \frac{dP}{dT} = \frac{-C'L_r}{I'M/P^2} < 0 \end{cases}$$

$$\textit{the effect of } M \qquad \begin{pmatrix} I' & 0 \\ L_r & \frac{M}{P^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{dr}{dM} \\ \frac{dP}{dM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{P} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dr}{dM} = \frac{0}{I'M/P^2} = 0 \\ \frac{dP}{dM} = \frac{I'/P}{I'M/P^2} = \frac{P}{M} > 0 \end{cases}$$

$$\textit{the effect of } Y \qquad \begin{pmatrix} I' & 0 \\ L_r & \frac{M}{P^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{dr}{dY} \\ \frac{dP}{dY} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-C' \\ -L_Y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dr}{dY} = \frac{(1-C')M/P^2}{I'M/P^2} = \frac{1-C'}{I'} < 0 \\ \frac{dP}{dY} = \frac{-I'L_Y-(1-C')L_r}{I'M/P^2} < 0 \end{cases}$$

在 r-Y 平面上，*IS* 曲线垂直于 r 轴（与价格 P 无关），*LM* 曲线向上倾斜。首先，财政支出扩张导致 *IS* 曲线上移，价格水平和利率水平均提高；其次，税收扩张相应的导致 *IS* 曲线下移，价格水平和利率水平均降低；第三，货币扩张导致 *LM* 曲线右移从而导致价格水平提高，但是利率水平保持不变；最后，外生产出水平扩张意味着经济中利率水平降低，*IS* 曲线上移，同时货币需求增加意味着实际货币供给降低，*LM* 曲线左移，两者共同导致价格水平和利率水平降低。

1.1.4 财政货币政策协同性

考察政策的乘子效应（以 P 固定，r,Y 内生情形为例）：

$$k_G = \frac{dY}{dG} = \frac{1}{(1-c') + I_r\frac{m_Y}{m_r}}, k_M = \frac{dY}{dM} = \frac{1}{P}\frac{1}{(1-c')\frac{m_r}{I_r} + m_Y} \tag{1.6}$$

乘子效应的大小决定了财政货币政策的效力，其大小取决于一系列参数。边际消费倾向 c' 越大相应的财政货币政策乘子越大，这也表明改善经济增长结构，扩大内需对于调节宏观政策的影响。

$\frac{I_r}{m_r}$ 的变化决定了财政货币政策乘子的不同反应，经济含义表示经济中投资对利率的敏感度和货币需求对于利率的敏感度的权衡，$\frac{I_r}{m_r}$ 增加说明投资对于利率更加敏感，因而财政政策乘子下降而货币政策乘子上升。*DeLong and Summers(2012Brooking EPA)* 分析了美国 2008 年金融危机后货币宽松后财政政策，并指出了 QE 后财政政策发挥效力的情形。

此外，政策乘子可以帮助分析极端情况下财政货币政策的效力：

- $m_r \to \infty, \frac{I_r}{m_r} \to 0$，货币政策无效而财政政策有效，经济处于流动性陷阱中，居民的货币需求对于利率完全敏感，货币政策调节利率的渠道完全失效；
- $m_r \to 0, \frac{I_r}{m_r} \to \infty$，财政政策无效而货币政策有效，此时扩张货币时居民货币需求不敏感，而利率变动对于投资的挤出更加明显，经济处于投资陷阱中，财政失效；

[5]注意：*LM* 曲线的移动一定要相应的转化为经济中实际货币供给 $\frac{M}{P}$ 的变化，例如货币需求函数增加要相应的转换为实际货币供给减少，*LM* 曲线左移。

1.2 开放经济的 *IS-LM* 模型

1.2.1 开放经济的 *IS-LM* 模型

开放经济中需要将进出口和汇率市场纳入模型，即新增内生变量 NX 及其价格 e。定义名义汇率 E，实际汇率表示为 $e=\frac{EP^*}{P}$，其中 P^* 表示外币，实际汇率表示的是外币的实际汇率水平。$NX'(e)>0$ 表明外币汇率越高，本币越便宜，净出口规模扩大。

纳入外汇市场均衡：资本的净流出和净出口水平需要满足国际收支平衡，其中资本净流入 $CF=CF(r-r^*), CF'(r-r^*)>0$ 表明本国的实际利率越高，资本净流入越高。外汇市场均衡表示为：货物净出口与资本净流入之和等于 0，国际收支平衡

$$NX(e)+CF(r-r^*)=0 \tag{1.7}$$

开放经济中的 *IS-LM* 模型给定如下 (*Mundell(1963) and Flemming(1961)*)：

$$\begin{cases} Y=C(Y-T)+I(r)+G+NX(E\frac{P^*}{P}) \\ \frac{M}{P}=m(r,Y) \\ r=r^* \end{cases}$$

$$0<C'<1, C''<0, I'<0, m_{r^*}<0, m_Y>0, NX'>0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Y=C(Y-T)+I(r^*)+G+NX(E\frac{P^*}{P}) \\ \frac{M}{P}=m(r^*,Y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1-C')dY=-C'dT+I'dr^*+dG+NX'\frac{P^*}{P}dE+NX'\frac{E}{P}dP^*-NX'\frac{EP^*}{P^2}dP \\ \frac{1}{P}dM-\frac{M}{P^2}dP=m_{r^*}dr^*+m_YdY \end{cases}$$

对于要素市场做如下假定：资本要素自由流动，劳动不流动。给定本国利率水平 r 和世界利率 r^*，如果市场完备必然有 $r=r^*$，如果市场不完备存在 $r\neq r^*$。

1.2.2 固定汇率制度：E 外生，M,Y 内生

假定市场完备，$r=r^*$，*IS-LM* 简化为：在该系统中，汇率 E 外生给定并维持在固定水平，我们额外假定本国价格水平 P 固定，此时内生变量为产出水平 Y 以及货币供应 M。为什么货币供应是内生变量？在固定汇率制度下，汇率市场上的升值或贬值压力需要央行通过购买或抛售外汇进行，从而本国为了维持固定汇率丧失了货币政策独立性，此时货币供应 M 跟随着汇率的潜在变化而变动。下面考察本国财政政策 G,T、外生汇率水平 E、国外价格水平 P^* 和利率水平 r 变化对于经济的影响：

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1-C' & 0 \\ m_Y & -\frac{1}{P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dY \\ dM \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C'dT+I'dr^*+dG+NX'\frac{P^*}{P}dE+NX'\frac{E}{P}dP^*-NX'\frac{EP^*}{P^2}dP \\ \frac{M}{P^2}dP+m_{r^*}dr^* \end{pmatrix}$$

$$G\text{:}\begin{cases} \frac{dY}{dG}=\frac{-1/P}{-(1-C')/P}=\frac{1}{1-C'}>0 \\ \frac{dM}{dG}=\frac{m_Y}{(1-C')/P}>0 \end{cases} \quad T\text{:}\begin{cases} \frac{dY}{dT}=\frac{C'/P}{-(1-C')/P}=\frac{-C'}{1-C'}<0 \\ \frac{dM}{dT}=\frac{C'm_Y}{-(1-C')/P}<0 \end{cases}$$

$$E\text{:}\begin{cases} \frac{dY}{dE}=\frac{-NX'P^*/P^2}{-(1-C')/P}=\frac{NX'P^*}{(1-C')P}>0 \\ \frac{dM}{dE}=\frac{-m_YNX'P^*/P}{-(1-C')/P}=\frac{m_YNX'P^*}{1-C'}>0 \end{cases} \quad P^*\text{:}\begin{cases} \frac{dY}{dP^*}=\frac{-NX'E/P^2}{-(1-C')/P}=\frac{NX'E}{(1-C')P}>0 \\ \frac{dM}{dP^*}=\frac{-m_YNX'E/P}{-(1-C')/P}=\frac{m_YNX'E}{1-C'}>0 \end{cases}$$

$$r^*\text{:}\begin{cases} \frac{dY}{dr^*}=\frac{-I'/P}{-(1-C')/P}=\frac{I'}{1-C'}<0 \\ \frac{dM}{dr^*}=\frac{-(1-C')m_{r^*}-I'm_Y}{-(1-C')/P}<0 \end{cases}$$

开放经济的 E-Y 空间中，*IS* 曲线向上倾斜，*LM* 曲线垂直于 Y 轴。比较静态分析表明：首先，本国扩张财政政策会导致产出水平提高，同时本国面临汇率升值，为了维持固定汇率从而扩张货币引导汇率下行，因此产出扩张同时货币扩张；其次，固定汇率水平提高（外币升值从而本币贬值）导致净出口水平扩张，*IS* 曲线左移，为了避免汇率提高从而扩张货币，因此产出和货币同时扩张；第三，国外产品价格提

高意味着净出口提高，IS 曲线左移，产出和货币同时扩张；最后，国际利率水平提高意味着投资水平降低，IS 曲线左移；货币需求降低从而实际货币供应相对增加，LM 右移，为了冲销汇率降低，央行减少货币供应维持汇率不变，LM 左移，产出水平和货币供应降低。

1.2.3 浮动汇率制度：E,Y 内生

假定市场完备，$r = r^*$，IS-LM 简化为：在该系统中，我们假定本国价格水平 P 保持不变，内生变量为产出 Y 和汇率 E，此时货币政策 M 相应的成为外生变量，分别考察本国财政政策 G,T、货币政策 M、国外价格水平 P^* 和利率水平 r 变化对于经济的影响：

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1-C' & -NX'\frac{P^*}{P} \\ m_Y & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dY \\ dE \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C'dT + I'dr^* + dG + NX'\frac{E}{P}dP^* - NX'\frac{EP^*}{P^2}dP \\ \frac{1}{P}dM - \frac{M}{P^2}dP - m_{r^*}dr^* \end{pmatrix}$$

$$G\colon \begin{cases} \frac{dY}{dG} = \frac{0}{m_Y NX'P^*/P} = 0 \\ \frac{dE}{dG} = \frac{-m_Y}{m_Y NX'P^*/P} = \frac{-1}{NX'P^*/P} < 0 \end{cases} \quad T\colon \begin{cases} \frac{dY}{dT} = \frac{0}{m_Y NX'P^*/P} = 0 \\ \frac{dE}{dT} = \frac{C'm_Y}{m_Y NX'P^*/P} = \frac{C'}{NX'P^*/P} > 0 \end{cases}$$

$$M\colon \begin{cases} \frac{dY}{dM} = \frac{NX'P^*/P}{m_Y NX'P^*/P} = \frac{1}{m_Y P} > 0 \\ \frac{dE}{dM} = \frac{(1-C')/P}{m_Y NX'P^*/P} = \frac{1-C'}{m_Y NX'P^*} > 0 \end{cases} \quad P^*\colon \begin{cases} \frac{dY}{dP^*} = \frac{0}{m_Y NX'P^*/P} = 0 \\ \frac{dE}{dP^*} = \frac{-E}{P} < 0 \end{cases}$$

$$r^*\colon \begin{cases} \frac{dY}{dr^*} = \frac{-m_{r^*}}{m_Y} > 0 \\ \frac{dE}{dr^*} = \frac{-(1-C')m_{r^*} - I'm_Y}{m_Y NX'P^*/P} > 0 \end{cases}$$

相比于固定汇率制度，浮动汇率制度下的调整更为简单，不需要央行根据外汇的升值或贬值情况制定货币政策。

1.2.4 市场不完备情形：$r \neq r^*$

假定市场不完备情况下，$r \neq r^*$，存在三方程决定的均衡系统：

$$\begin{aligned} IS : & Y = C(Y-T) + I(r) + G + NX(EP^*/P) \\ LM : & M/P = m(r,Y) \\ & NX(EP^*/P) + CF(r - r^*) = 0 \end{aligned}$$

给定开放经济下的 IS-LM 模型得到（考察内生利率水平，使用资本净流出代替净出口进行分析），经济中的内生变量为 r,Y，此时假定本国价格水平 P 保持不变，分别考察本国财政政策、货币政策以及国际利率水平对于经济的影响：

$$\begin{cases} Y = C(Y-T) + I(r) + G - CF(r - r^*) \\ \frac{M}{P} = m(r,Y) \end{cases} \quad CF' > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1-C')dY = -C'dT + I'dr + dG - CF'dr + CF'dr^* \\ \frac{1}{P}dM - \frac{M}{P^2}dP = m_r dr + m_Y dY \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1-C' & CF' - I' \\ m_Y & m_r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dY \\ dr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C'dT + dG + CF'dr^* \\ \frac{1}{P}dM - \frac{M}{P^2}dP \end{pmatrix}$$

$$G\colon \begin{cases} \frac{dY}{dG} = \frac{m_r}{(1-C')m_r - (CF'-I')m_Y} > 0 \\ \frac{dr}{dG} = \frac{-m_Y}{(1-C')m_r - (CF'-I')m_Y} > 0 \end{cases} \quad T\colon \begin{cases} \frac{dY}{dT} = \frac{-C'm_r}{(1-C')m_r - (CF'-I')m_Y} < 0 \\ \frac{dr}{dT} = \frac{C'm_Y}{(1-C')m_r - (CF'-I')m_Y} < 0 \end{cases}$$

$$M\colon \begin{cases} \frac{dY}{dM} = \frac{-(CF'-I')/P}{(1-C')m_r - (CF'-I')m_Y} > 0 \\ \frac{dr}{dM} = \frac{(1-C')/P}{(1-C')m_r - (CF'-I')m_Y} < 0 \end{cases} \quad r^*\colon \begin{cases} \frac{dY}{dr^*} = \frac{CF'm_r}{(1-C')m_r - (CF'-I')m_Y} > 0 \\ \frac{dr}{dr^*} = \frac{-CF'm_Y}{(1-C')m_r - (CF'-I')m_Y} > 0 \end{cases}$$

1.3 古典经济一般均衡框架

1.3.1 模型设定

在一般均衡的框架下重写 *IS-LM* 模型，该模型能够同时决定 9 个内生变量，也是唯一一个能够同时决定 9 个内生变量的宏观模型。一般均衡框架的基本形式为：消费者拥有资源，通过出售资源获得商品；企业不用有资源（厂商是生产方式），使用资源生产产品；一般均衡情况下企业生产和消费者需求满足出清条件。

对于消费者，对于资本的需求表示为：

$$\frac{M}{P} = m(r, Y) \tag{1.8}$$

对于消费的需求表示为：

$$C = C(Y - T) \tag{1.9}$$

劳动者供给问题：劳动者面临消费和闲暇之间的权衡取舍，因而可以通过最优化消费者效用函数确定消费者的劳动供给，消费者的劳动供给为如下最大化问题：

$$max\ u(c, l) \tag{1.10}$$

$$s.t.\ pc \leq W(1 - l) \tag{1.11}$$

$$foc.\ \frac{u_c}{u_l} = \frac{W}{P} = \frac{1}{W/P} \tag{1.12}$$

$$L^s = \phi(\frac{W}{P}) \tag{1.13}$$

上式表明，实际工资水平决定劳动的供给[6]。

厂商的利润最大化条件表示为：

$$max\ F(K, L) - rK - wL \tag{1.14}$$

$$FOC.\ r = F_K, w = F'_L \tag{1.15}$$

考虑到企业在短期内不改变资本的投入（短期内资本水平固定[7]），企业的短期资本投入固定为 $\bar{K}$，对应的投资水平为 $I = I(r)$。代入最优化条件可以得到：

$$F_L(\bar{K}, L) = W/P \to L^D = \Phi(W/P) \tag{1.16}$$

政府端假定面临平衡预算约束问题。政府的收入包括税收收入、发行债券和发行货币收入，表示为 $T + \frac{\dot{B}}{P} + \frac{\dot{M}}{P}$，政府的支出包括公共支出和偿还债券的利息，表示为 $G + r\frac{B}{P}$，平衡预算约束表示为：

$$T + \frac{\dot{B}}{P} + \frac{\dot{M}}{P} = G + r\frac{B}{P} \tag{1.17}$$

但是实际上在 *IS-LM* 模型中，政府平衡预算约束并不会起到约束作用，因而在一般均衡框架中可以省略分析。

给出一般均衡框架下的古典市场均衡：消费者表示为：

$$\frac{M}{P} = m(r, Y) \tag{1.18}$$

$$L^s = \phi(W/P) \tag{1.19}$$

$$C = C(Y - T) \tag{1.20}$$

[6]新凯恩斯生产函数中往往将劳动供给表述为如下形式：$u(c, 1 - L^s) = \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} - \frac{L^{1+\phi}}{1+\phi}$。

[7]Keynesian 模型是没有增长的框架，相应的资本存量水平固定在 $\bar{K}$ 的水平上。

生产者表示为:

$$Y = F(\bar{K}, L^D) \tag{1.21}$$

$$F_L(\bar{K}, L^D) = W/P \tag{1.22}$$

$$I = I(r) \tag{1.23}$$

政府预算约束均衡表示为:

$$T + \frac{\dot{B}}{P} + \frac{\dot{M}}{P} = G + r\frac{B}{P}$$

市场均衡表示为:

$$Y = C + I + G \tag{1.24}$$

$$L^S = L^D \tag{1.25}$$

在该系统中，内生变量为 7 个 $Y, C, I, L^S = L^D, P, r, w$，外生变量为 $G, T, M, \bar{K}$。在该系统下可以考察财政或货币政策等外生变量对于系统的影响以及 9 个内生变量的同时决定问题。基本思路是除政府约束和劳动市场出清外的 7 个均衡条件全微分，得到关于内生变量 $(dY, dC, dI, dL^S, dL^D, dP, dr, dw)$ 的微分方程组，进而逐一分析财政货币政策对于经济的影响。

1.3.2 比较静态分析

下面给出古典经济一般均衡的决定框架以及基本设定（政府的预算约束并不产生作用），该均衡框架包含消费者的 3 个方程、企业的 3 个方程以及市场均衡出清条件，在古典经济中价格和工资均具有完全弹性，因而此时不存在失业，劳动供给 N^S 等于劳动需求 N^D。需要明确，短期经济中，资本存量 K 外生给定保持不变，在一般均衡中，内生变量是 Y, C, I, N, P, r, w，其中 $N = N^S = N^D$，共 7 个内生变量，外生变量包括 T, G, M；

$$\begin{cases} Y = C + I + G \\ C = C(Y - T) \\ I = I(r) \\ N = N(\frac{w}{P}) \\ Y = F(K, N) \\ \frac{M}{P} = L(r, Y) \\ F_N = \frac{w}{P} \end{cases} \begin{cases} F(K,0) = F(0,N) = 0 \\ F_K > 0, F_N > 0 \\ F_{KK} < 0, F_{NN} < 0 \\ F(\lambda K, \lambda N) = \lambda F(K,N) \Rightarrow F(K,N) = F_K K + F_N N \\ \lim_{K\to 0} F_K = +\infty, \lim_{K\to\infty} F_K = 0, \lim_{N\to 0} F_N = +\infty, \lim_{N\to\infty} F_N = 0 \\ \max_{K,N} PF(K,N) - rK - wN \Rightarrow \frac{w}{P} = F_N, \frac{r}{P} = F_K \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1) dY = dC + dI + dG & dK = 0 \Rightarrow (\frac{1}{N'} - F_{NN})dN = 0 \\ (2) dC = C'dY - C'dT & \Rightarrow dY = 0 \\ (3) dI = I'dr & \Rightarrow dC = -C'dT \\ (4) dN = N'\frac{1}{P}dw - N'\frac{w}{P^2}dP & \Rightarrow dI = C'dT - dG \\ (5) dY = F_K dK + F_N dN & \Rightarrow dr = \frac{C'}{I'}dT - \frac{1}{I'}dG \\ (6) \frac{1}{P}dM - \frac{M}{P^2}dP = L_r dr + L_Y dY & \Rightarrow dP = \frac{P^2}{M}(\frac{1}{P}dM - \frac{C'L_r}{I'}dT + \frac{L_r}{I'}dG) \\ (7) F_{NN}dN + F_{NK}dK = \frac{1}{P}dw - \frac{w}{P^2}dP & \Rightarrow dw = \frac{w}{M}dM - \frac{C'L_r Pw}{MI'}dT + \frac{L_r Pw}{MI'}dG \end{cases}$$

上述方法根据资本存量外生条件将所有内生变量直接转化为外生变量的函数表达式，或者可以利用 7×7 矩阵进行求解。

首先在一般均衡的框架下考察才财政政策与货币政策的一般均衡效应：

$$\Rightarrow \begin{cases} dY=0 \\ dC=-C'dT \\ dI=C'dT-dG \\ dN=0 \\ dr=\frac{C'}{I'}dT-\frac{1}{I'}dG \\ dP=\frac{P}{M}dM-\frac{C'L_rP^2}{MI'}dT+\frac{L_rP^2}{MI'}dG \\ dw=\frac{w}{M}dM-\frac{C'L_rPw}{MI'}dT+\frac{L_rPw}{MI'}dG \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dY}{dG}=0 \\ \frac{dC}{dG}=0 \\ \frac{dI}{dG}=-1<0 \\ \frac{dN}{dG}=0 \\ \frac{dr}{dG}=-\frac{1}{I'}>0 \\ \frac{dP}{dG}=\frac{L_rP^2}{MI'}>0 \\ \frac{dw}{dG}=\frac{L_rPw}{MI'}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dY}{dT}=0 \\ \frac{dC}{dT}=-C'<0 \\ \frac{dI}{dT}=C'>0 \\ \frac{dN}{dT}=0 \\ \frac{dr}{dT}=\frac{C'}{I'}<0 \\ \frac{dP}{dT}=-\frac{C'L_rP^2}{MI'}<0 \\ \frac{dw}{dT}=-\frac{C'L_rPw}{MI'}<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dY}{dM}=0 \\ \frac{dC}{dM}=0 \\ \frac{dI}{dM}=0 \\ \frac{dN}{dM}=0 \\ \frac{dr}{dM}=0 \\ \frac{dP}{dM}=\frac{P}{M}>0 \\ \frac{dw}{dM}=\frac{w}{M}>0 \end{cases}$$

可以看到, 在古典经济一般均衡框架下, 货币政策 M 不会影响经济中的实际变量, 只影响名义变量 P,w, 因此在古典经济中货币是中性的。财政扩张并不会影响经济中的产出水平和消费水平，但是依旧会提高利率并基础投资，价格水平与名义工资水平相应提高。相比之下，税收则会影响私人消费，税收扩张会导致均衡消费水平降低，利率降低并导致投资扩张，产出水平保持不变。其政策含义在于：短期的财政政策和货币政策并不影响长期的产出水平，只能提高价格水平，因此财政和货币政策长期无效。

其次，考察短期外生给定的资本水平 K 对于经济的影响：

$$\begin{aligned} & dK\neq 0\Rightarrow (\tfrac{1}{N'}-F_{NN})dN=F_{NK}dK \\ & \Rightarrow dY=\tfrac{F_K-F_KF_{NN}N'+F_NF_{NK}N'}{1-F_{NN}N'}dK \\ & \Rightarrow dC=C'\tfrac{F_K-F_KF_{NN}N'+F_NF_{NK}N'}{1-F_{NN}N'}dK-C'dT \\ & \Rightarrow dI=(1-C')\tfrac{F_K-F_KF_{NN}N'+F_NF_{NK}N'}{1-F_{NN}N'}dK+C'dT-dG \\ & \Rightarrow dr=\tfrac{1-C'}{I'}\tfrac{F_K-F_KF_{NN}N'+F_NF_{NK}N'}{1-F_{NN}N'}dK+\tfrac{C'}{I'}dT-\tfrac{1}{I'}dG \\ & \Rightarrow dP=-\tfrac{(1-C')L_rP^2}{MI'}\tfrac{F_K-F_KF_{NN}N'+F_NF_{NK}N'}{1-F_{NN}N'}dK+\tfrac{P^2}{M}(\tfrac{1}{P}dM-\tfrac{C'L_r}{I'}dT+\tfrac{L_r}{I'}dG) \\ & \Rightarrow dw=(\tfrac{PF_{NN}F_{NK}N'}{1-F_{NN}N'}+F_{NK}P-\tfrac{(1-C')LewP}{MI'}\tfrac{F_K-F_KF_{NN}N'+F_NF_{NK}N'}{1-F_{NN}N'})dK+\tfrac{w}{M}dM-\tfrac{C'L_rPw}{MI'}dT+\tfrac{L_rPw}{MI'}dG \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Rightarrow \frac{dY}{dK}=\frac{F_K-F_KF_{NN}N'+F_NF_{NK}N'}{1-F_{NN}N'}>0 \\ \Rightarrow \frac{dC}{dK}=C'\frac{F_K-F_KF_{NN}N'+F_NF_{NK}N'}{1-F_{NN}N'}>0 \\ \Rightarrow \frac{dI}{dK}=(1-C')\frac{F_K-F_KF_{NN}N'+F_NF_{NK}N'}{1-F_{NN}N'}>0 \\ \Rightarrow \frac{dN}{dK}=\frac{F_{NK}}{\frac{1}{N'}-F_{NN}}>0 \\ \Rightarrow \frac{dr}{dK}=\frac{1-C'}{I'}\frac{F_K-F_KF_{NN}N'+F_NF_{NK}N'}{1-F_{NN}N'}<0 \\ \Rightarrow \frac{dP}{dK}=-\frac{(1-C')L_rP^2}{MI'}\frac{F_K-F_KF_{NN}N'+F_NF_{NK}N'}{1-F_{NN}N'}<0 \\ \Rightarrow \frac{dw}{dK}=(\frac{PF_{NN}F_{NK}N'}{1-F_{NN}N'}+F_{NK}P-\frac{(1-C')LewP}{MI'}\frac{F_K-F_KF_{NN}N'+F_NF_{NK}N'}{1-F_{NN}N'})>0 \end{cases}$$

1.3.3 开放经济一般均衡框架

引入外汇市场条件：

$$NX=NX(E\frac{P^*}{P}) \tag{1.26}$$

如果资本充分流动则存在

$$r=r^*$$

如果资本流动不充分或者存在摩擦则有

$$r\neq r^*$$

给定古典框架，浮动汇率制度下，内生变量包括 9 个 $Y,C,I,L^S=L^D,NX,P,r,w,E$，外生变量为 $G,T,M,\bar{K},r^*,P^*$；固定汇率制度下，内生变量包括 9 个 $Y,C,I,L^S=L^D,NX,P,r,w,M$，外生变量包括 $G,T,E,\bar{K},r^*,P^*$。在一般的 *IS-LM* 中固定汇率下一般给定价格粘性，内生变量为 Y,M；浮动汇率制度下一般给定价格粘性，内生变量为 Y,E。可以看到，在一般均衡框架下内生变量可以由参数统一决定。

1.4 短期分析：*Keyness* 模型与 *Tobin* 模型

在古典市场均衡中，我们假定了劳动力市场均衡 $L^S = L^D$，从而内生决定了价格水平 P 和工资水平 W；为了刻画失业问题，我们需要同时决定 L^S, L^D，这个时候就需要从内生变量中选择 1 个变量作为外生变量，这样才能分析 7 个内生变量的均衡决定。因此，从古典到凯恩斯到托宾的框架，需要遵循如下机制：

1. **古典框架**：不存在失业问题 $L^S = L^D$，内生变量为 7 个 $Y, C, I, L^S = L^D, P, r, w$，外生变量为 $G, T, M, \bar{K}$；

2. ***Keynesian* 框架**：存在失业问题 $L^S \neq L^D$，存在如下两种框架：一是 P 具有刚性的框架，内生变量为 $Y, C, I, L^S = L^D, r, w$，外生变量为 $G, T, M, \bar{K}, P$；二是 W 具有刚性的框架，内生变量为 $Y, C, I, L^S = L^D, r, P$，外生变量为 $G, T, M, \bar{K}, W$；两种情况的核心假定不同，对应的财政货币政策对于经济的影响也不相同；

3. ***Tobin* 框架**：纳入资本-劳动市场机制，从而使得短期的资本存量固定在最优的理性选择水平 $F_K(\bar{K}, L^D) = r$，即当前的资本存量达到了市场均衡水平。内生变量为 $Y, C, I, L^S = L^D, r, P$，外生变量为 $G, T, M, \bar{K}, W$（工资刚性框架）。

1.4.1 *Keyness* 模型设定

古典经济中的基本假定是不存在失业，在 *Keyness* 模型中我们重点处理失业问题，此时劳动供需不再相等 $N^S \neq N^D$，内生变量变为 8 个变量，为了保证系统有解，我们不得不将某个内生变量设定为外生不变：一种方法是将价格水平 P 固定，另一种则是将名义工资水平 w 固定，在这里我们考察名义工资刚性下的 *Keyness* 模型：

$$
\begin{cases}
Y = C + I + G \\
C = C(Y - T) \\
I = I(r) \\
N^S = N(\frac{w}{P}) \\
Y = F(K, N^D) \\
\frac{M}{P} = L(r, Y) \\
F_{N^D} = \frac{w}{P}
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
(1) dY = dC + dI + dG \\
(2) dC = C' dY - C' dT \\
(3) dI = I' dr \\
(4) dN^S = N' \frac{1}{P} dw - N' \frac{w}{P^2} dP \\
(5) dY = F_K dK + F_{N^D} dN^D \\
(6) \frac{1}{P} dM - \frac{M}{P^2} dP = L_r dr + L_Y dY \\
(7) F_{N^D N^D} dN^D + F_{N^D K} dK = \frac{1}{P} dw - \frac{w}{P^2} dP
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
& dK = 0 \Rightarrow \frac{1}{N'} dN^S - F_{N^D N^D} dN^D = 0 \\
& \Rightarrow dN^S = -N' \frac{w}{P^2} dP, dN^D = -\frac{w}{F_{N^D N^D} P^2} dP \\
& \Rightarrow dY = -\frac{F_{N^D} w}{F_{N^D N^D} P^2} dP \\
& \Rightarrow dC = -C' \frac{F_{N^D} w}{F_{N^D N^D} P^2} dP - C' dT \\
& \Rightarrow dI = (C' - 1) \frac{F_{N^D} w}{F_{N^D N^D} P^2} dP + C' dT - dG \\
& \Rightarrow dr = \frac{C' - 1}{I'} \frac{F_{N^D} w}{F_{N^D N^D} P^2} dP + \frac{C'}{I'} dT - \frac{1}{I'} dG \\
& \Rightarrow dP = (\frac{P}{M} dM - \frac{C' L_r P^2}{M I'} dT + \frac{L_r P^2}{M I'} dG) / \underbrace{(1 + (\frac{(1 - C') L_r}{I'} - L_Y) \frac{F_{N^D} w}{F_{N^D N^D} M})}_{\gamma > 0}
\end{aligned}
$$

注意到，短期内的凯恩斯分析依旧保持了资本存量保持不变 $dK = 0$，从而可以大幅简化计算，或者可以根据 7×7 矩阵求解。

1.4.2 *Keynesian* 模型比较静态分析

在 *Keynesian* 模型中考察财政政策和货币政策的作用，此时结论与古典经济截然不同：

$$
\Rightarrow\begin{cases}
dY=-\frac{F_{N^D}w}{F_{N^DN^D}P^2}dP\\
dC=-C'dY-C'dT\\
dI=(C'-1)dY+C'dT-dG\\
dr=\frac{1}{I'}dI\\
dN^S=-N'\frac{w}{P^2}dP\\
dN^D=-\frac{w}{F_{N^DN^D}P^2}dP\\
dP=\frac{P}{\gamma M}dM-\frac{C'L_rP^2}{\gamma MI'}dT+\frac{L_rP^2}{\gamma MI'}dG
\end{cases}
\Rightarrow\begin{cases}
dY=-\frac{F_{N^D}w}{F_{N^DN^D}P^2}(\frac{P}{\gamma M}dM-\frac{C'L_rP^2}{\gamma MI'}dT+\frac{L_rP^2}{\gamma MI'}dG)\\
dC=-C'\frac{F_{N^D}w}{F_{N^DN^D}P^2}(\frac{P}{\gamma M}dM-\frac{C'L_rP^2}{\gamma MI'}dT+\frac{L_rP^2}{\gamma MI'}dG)-C'dT\\
dI=\frac{(C'-1)F_{N^D}w}{F_{N^DN^D}P^2}(\frac{P}{\gamma M}dM-\frac{C'L_rP^2}{\gamma MI'}dT+\frac{L_rP^2}{\gamma MI'}dG)+C'dT-dG\\
dr=\frac{1}{I'}\frac{F_{N^D}w}{F_{N^DN^D}P^2}(\frac{P}{\gamma M}dM-\frac{C'L_rP^2}{\gamma MI'}dT+\frac{L_rP^2}{\gamma MI'}dG)+\frac{C'}{I'}dT-\frac{1}{I'}dG\\
dN^S=-N'\frac{w}{P^2}(\frac{P}{\gamma M}dM-\frac{C'L_rP^2}{\gamma MI'}dT+\frac{L_rP^2}{\gamma MI'}dG)\\
dN^D=-\frac{w}{F_{N^DN^D}P^2}(\frac{P}{\gamma M}dM-\frac{C'L_rP^2}{\gamma MI'}dT+\frac{L_rP^2}{\gamma MI'}dG)\\
dP=\frac{P}{\gamma M}dM-\frac{C'L_rP^2}{\gamma MI'}dT+\frac{L_rP^2}{\gamma MI'}dG
\end{cases}
$$

$$
G:\begin{cases}
\frac{dY}{dG}=-\frac{F_{N^D}w}{F_{N^DN^D}P^2}\frac{dP}{dG}>0\\
\frac{dC}{dG}=C'\frac{dY}{dG}>0\\
\frac{dI}{dG}=(C'-1)\frac{dY}{dG}-1<0\\
\frac{dr}{dG}=\frac{1}{I'}\frac{dI}{dG}>0\\
\frac{dN^S}{dG}=-\frac{N'w}{P^2}\frac{dP}{dG}<0\\
\frac{dN^D}{dG}=-\frac{w}{F_{N^DN^D}P^2}\frac{dP}{dG}>0\\
\frac{dP}{dG}=\frac{L_rP^2}{\gamma MI'}>0
\end{cases}
T:\begin{cases}
\frac{dY}{dT}=-\frac{F_{N^D}w}{F_{N^DN^D}P^2}\frac{dP}{dT}<0\\
\frac{dC}{dT}=C'\frac{dY}{dT}-C'<0\\
\frac{dI}{dT}=(C'-1)\frac{dY}{dT}+C'>0\\
\frac{dr}{dT}=\frac{1}{I'}\frac{dI}{dT}<0\\
\frac{dN^S}{dT}=-\frac{N'w}{P^2}\frac{dP}{dT}>0\\
\frac{dN^D}{dT}=-\frac{w}{F_{N^DN^D}P^2}\frac{dP}{dT}<0\\
\frac{dP}{dT}=-\frac{C'L_rP}{\gamma MI'}<0
\end{cases}
M:\begin{cases}
\frac{dY}{dM}=-\frac{F_{N^D}w}{F_{N^DN^D}P^2}\frac{dP}{dM}>0\\
\frac{dC}{dM}=C'\frac{dY}{dM}>0\\
\frac{dI}{dM}=(1-C')\frac{dY}{dM}>0\\
\frac{dr}{dM}=\frac{1}{I'}\frac{dI}{dM}<0\\
\frac{dN^S}{dM}=-\frac{N'w}{P^2}\frac{dP}{dM}<0\\
\frac{dN^D}{dM}=-\frac{w}{F_{N^DN^D}P^2}\frac{dP}{dM}>0\\
\frac{dP}{dM}=\frac{P}{\gamma M}>0
\end{cases}
$$

注意到，此时扩张的财政政策和扩张的货币政策均可以导致短期内产出水平提高，因此短期内的财政货币政策是有效的。扩张财政导致短期产出水平提高，利率水平提高并挤出利率，价格水平提高；扩张货币导致产出水平扩张，同时利率降低且投资水平提高，价格水平提高。此外，工资具有刚性从而无法及时调整，此时扩张财政和扩张货币均会导致劳动需求增加（产出增加），但是劳动供给受限于工资刚性出现相对降低，注意到在工资刚性的框架中劳动供给和劳动需求呈现反方向变动。

1.4.3 *Tobin* 模型

对于 *Tobin* 模型，核心的改变在于对于资本存量水平的假定，人为设定存在资本劳动市场机制促使短期资本存量实现了一般均衡中的最优条件：

$$F_K(\bar{K},L^D)=r \tag{1.27}$$

对于修改后的 *Tobin* 模型，重新分析 *IS-LM* 曲线及其均衡决定。对于 *IS* 曲线的决定，我们有

$$Y=F(\bar{K},L^D),F_K(\bar{K},L^D)=r \tag{1.28}$$

$$\frac{dY}{dr}>0 \tag{1.29}$$

这表明 *IS* 曲线向上倾斜，同时 *LM* 向上倾斜。*IS* 曲线中 Y 上升导致劳动需求 L^D 上升，进而导致 $F_K(\bar{K},L^D)$ 上升，从而促使利率水平 r 上升（资本-劳动市场机制），因而 *Tobin* 框架下 IS 曲线向上倾斜。

考察 *Tobin* 模型中货币政策的作用，即 $\frac{dr}{dM}$ 的正负。扩张性的货币政策未必会导致利率水平降低，这是因为一方面扩张货币通过 *LM* 导致利率下行，另一方面扩张货币通过资本劳动市场机制导致利率上行，利率的变化取决于两种效应的强弱；因而 *Tobin* 模型下扩张货币可能会导致 Y,r 同时提高。

1.5 封闭经济动态 *IS-LM* 模型

Tobin 给出了动态的 *IS-LM* 模型，但是需要注意的是，该框架并不是增长模型，并没有处理资本的动态积累问题。将静态的 *IS-LM* 模型转化为动态 *IS-LM* 模型：与静态 *IS-LM* 模型相同，内生变量为

P, Y, r，在二维动力系统中只能确定两个内生变量，因此必然有一个变量需要人为设定为外生不变

$$Y_t = C(Y_t - T) + I(r_t) + G \tag{1.30}$$

$$\frac{M_t}{P_t} = m(r_t, Y_t) \tag{1.31}$$

根据 *IS-LM* 中的需求与供给关系确定积累动态，假定 P 外生给定，需求超过供给的部分表示动态

$$\dot{Y}_t = \alpha(C(Y_t - T) + I(r_t) + G - Y_t), \alpha(0) = 0, \alpha'(\cdot) > 0 \tag{1.32}$$

$$\dot{r}_t = \beta(m(r_t, Y_t) - \frac{M_t}{P_t}), \beta(0) = 0, \beta'(\cdot) > 0 \tag{1.33}$$

上述模型是完全 *ad-hoc* 基于先验的模型，没有微观基础；这种完全的建立在 *ad-hoc* 上的动力系统均衡解一定是完全稳定的。

同理，如果给定 Y 外生不变，需求超过供给部分表示积累动态：

$$\dot{P}_t = \alpha(C(Y_t - T) + I(r_t) + G - Y_t), \alpha(0) = 0, \alpha'(\cdot) > 0 \tag{1.34}$$

$$\dot{r}_t = \beta(m(r_t, Y_t) - \frac{M_t}{P_t}), \beta(0) = 0, \beta'(\cdot) > 0 \tag{1.35}$$

1.5.1 P 外生，Y, r 内情形

给定价格水平外生的动态 *IS-LM* 模型：

$$\begin{cases} \dot{Y} = \alpha(C(Y - T) + I(r) + G - Y) \\ \dot{r} = \beta(m(r, Y) - \frac{M}{P}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha(0) = 0, \alpha' > 0 \\ \beta(0) = 0, \beta' > 0 \end{cases}$$

该二维动力系统的均衡点表示为：

$$\begin{cases} \dot{Y}|_{Y^*, r^*} = \alpha(C(Y^* - T) + I(r^*) + G - Y^*) = 0 \\ \dot{r}|_{Y^*, r^*} = \beta(m(r^*, Y^*) - \frac{M}{P}) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C(Y^* - T) + I(r) + G - Y^*) = 0 & \text{(IS)} \\ m(r^*, Y^*) - \frac{M}{P} = 0 & \text{(LM)} \end{cases}$$

动态 *IS-LM* 模型在均衡点处可以得到静态的 *IS-LM* 模型，因此与静态 *IS-LM* 模型具有完全一致的均衡解。

线性化展开得到：

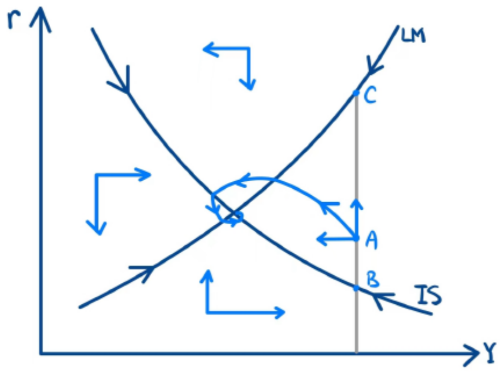
$$\begin{cases} \dot{Y} = \alpha'(C' - 1)(Y - Y^*) + \alpha' I'(r - r^*) \\ \dot{r} = \beta' m_Y (Y - Y^*) + \beta' m_r (r - r^*) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{Y} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha'(C' - 1) & \alpha' I' \\ \beta' m_Y & \beta' m_r \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} Y - Y^* \\ r - r^* \end{pmatrix}$$

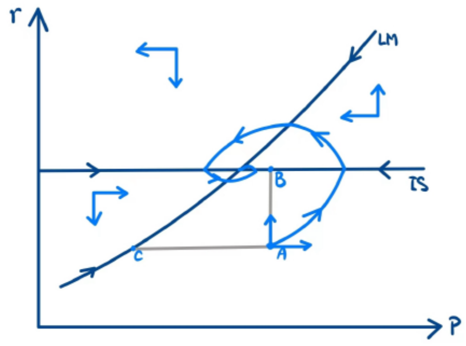
$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = tr(A) = \alpha'(C' - 1) + \beta' m_r < 0 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = det(A) = \alpha' \beta'(C' - 1) m_r - \alpha' \beta' m_Y I' > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{if } \lambda_1, \lambda_2 \text{ is real, then } \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \text{stable} \\ \text{if } \lambda_1, \lambda_2 \text{ is plural, then real part} < 0, \text{stable} \end{cases}$$

注意到特征根均小于 0，因此动态 *IS-LM* 的均衡点是完全稳定的，这是因为基于 *ad-hoc* 的假设对应于完全理性的系统。进一步的可以给出该完全稳定系统的相位图。



(a) 价格水平固定的相位图



(b) 产出水平固定的相位图

1.5.2 Y 外生，P, r 内生情形

给定产出水平外生的动态 *IS-LM* 模型：

$$\begin{cases} \dot{P} = \alpha(C(Y-T) + I(r) + G - Y) \\ \dot{r} = \beta(m(r, Y) - \frac{M}{P}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha(0) = 0, \alpha' > 0 \\ \beta(0) = 0, \beta' > 0 \end{cases}$$

相应的均衡解表示为：

$$\begin{cases} \dot{P}|_{P^*, r^*} = \alpha(C(Y-T) + I(r^*) + G - Y) = 0 \\ \dot{r}|_{P^*, r^*} = \beta(m(r^*, Y) - \frac{M}{P^*}) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C(Y-T) + I(r^*) + G - Y = 0 & \text{(IS)} \\ m(r^*, Y) - \frac{M}{P^*} = 0 & \text{(LM)} \end{cases}$$

线性化展开得到：

$$\begin{cases} \dot{P} = \alpha' I'(r - r^*) \\ \dot{r} = \beta' \frac{M}{P^2}(P - P^*) + \beta' m_r (r - r^*) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{P} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \alpha' I' \\ \beta' \frac{M}{P^2} & \beta' m_r \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} P - P^* \\ r - r^* \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = tr(A) = \beta' m_r < 0 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = det(A) = -\alpha' \beta' \frac{M}{P^2} I' > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{if } \lambda_1, \lambda_2 \text{ is real, then } \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \text{stable} \\ \text{if } \lambda_1, \lambda_2 \text{ is plural, then real part} < 0, \text{stable} \end{cases}$$

可以证明，该动力系统的均衡解是完全稳定的，相位图如图所示。

1.6 开放经济的动态 *IS-LM* 模型

考察开放经济，引入外汇市场，我们假定采取浮动汇率制度，*IS-LM* 动态化为：

$$Y_t = C(Y_t - T) + I(r_t) + G + NX(E_t \frac{P^*}{P_t}) \tag{1.36}$$

$$\frac{M_t}{P_t} = m(r_t, Y_t) \tag{1.37}$$

假定该模型中外生给定 P，内生决定 (Y_t, E_t)。IS 中产出的动态变化表示为

$$\dot{Y}_t = f(C(Y_t - T) + I(r_t) + NX(E_t\frac{P^*}{P_t}) + G - Y_t), f(0) = 0, f'(\cdot) > 0 \tag{1.38}$$

为了确定外汇市场的均衡，我们需要给出外汇市场的动态。在这里，我们从外汇市场无套利条件出发确定汇率变动，给定外汇市场的无套利条件

$$\begin{aligned}
exp(r_t dt) &= \frac{E(t+dt)}{E(t)} exp(r^*)dt &(1.39)\\
\frac{E(t+dt)}{E(t)} &= exp(r_t - r^*)dt &(1.40)\\
&= 1 + r_t - r^* &(1.41)\\
\dot{E}_t &= E_t(r_t - r^*) &(1.42)
\end{aligned}$$

值得注意的是，在动态的 MF 模型中，由于资本市场的完备性和无套利条件，E_t 的决定体现了理性选择；在该系统中，r_t 由 LM 曲线给出，因此动态的 MF 模型给定如下（假定 P 外生）：

$$\begin{aligned}
&\dot{Y}_t = f(C(Y_t - T) + I(r_t) + NX(E_t\frac{P^*}{P_t}) + G - Y_t), f(0) = 0, f'(\cdot) > 0 &(1.43)\\
&\dot{E}_t = E_t(r_t - r^*) &(1.44)\\
&\frac{M_t}{P} = m(r_t, Y_t) &(1.45)
\end{aligned}$$

表面上看这是一个三维动力系统，实际上根据第 3 个等式我们可以确定 $r_t = r(\frac{M_t}{P}, Y_t)$，进而可以简化为关于 (Y_t, E_t) 的二维动力系统。关于该二维动力系统，我们可以确定均衡点的存在性、唯一性以及稳定性。由于资本无套利条件的存在，该系统是理性选择的结果，因而均衡点一定是鞍点稳定的。

1.6.1 P 外生，Y, e 内生情形

给定价格水平外生的开放经济动态 IS-LM 模型：

$$\begin{cases}
\dot{Y} = \alpha(C(Y-T) + I(r) + G + NX(e\frac{\bar{P}}{P}) - Y)\\
\dot{e} = e(r(\frac{M}{P}, Y) - r^*)
\end{cases}$$
$$\begin{cases}
\alpha(0) = 0, \alpha' > 0\\
r_{\frac{M}{P}} < 0, r_Y > 0
\end{cases}$$

均衡点相应的表示为：

$$\begin{cases}
\dot{Y}|_{Y^*, r^*} = \alpha(C(Y^* - T) + I + G + NX(e^*\frac{\bar{P}}{P}) - Y^*) = 0\\
\dot{e}|_{Y^*, r^*} = e(r(\frac{M}{P}, Y^*) - r^*) = 0
\end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases}
C(Y^* - T) + I(r) + G + NX(e^*\frac{\bar{P}}{P}) - Y^* = 0 & \text{(AS)}\\
r(\frac{M}{P}, Y^*) - r^* = 0 & \text{(AD)}
\end{cases}$$

该动力系统的线性化展开系统表示为：

$$
\begin{cases}
\dot{Y} = \alpha'(C'-1)(Y-Y^*) + \alpha' NX' \frac{\bar{P}}{P}(e-e^*) \\
\dot{r} = e^* r_Y (Y-Y^*)
\end{cases}
$$

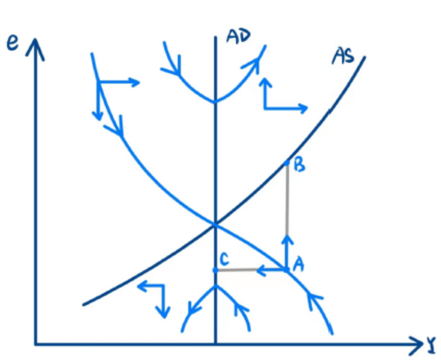
$$
\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{Y} \\ \dot{e} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha'(C'-1) & \alpha' NX' \frac{\bar{P}}{P} \\ e^* r_Y & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} Y-Y^* \\ e-e^* \end{pmatrix}
$$

$$
\Rightarrow \begin{cases}
\lambda_1 + \lambda_2 = tr(A) = \alpha'(C'-1) < 0 \\
\lambda_1 \cdot \lambda_2 = det(A) = -\alpha' e^* r_Y NX' \frac{\bar{P}}{P} < 0
\end{cases}
$$

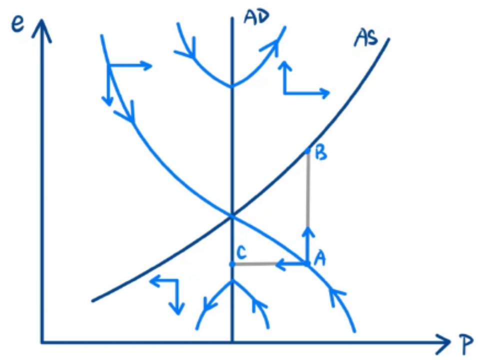
$$
\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \text{ are one positive and one negative}
$$

$$
\Rightarrow \exists (Y(0), e(0)) \neq (Y^*, e^*), \text{ s.t. } \lim_{t\to\infty} (Y(t), e(t)) = (Y^*, e^*)
$$

注意到，由于外汇市场中存在无套利的理性选择，此时动力系统的均衡解是鞍点稳定的，相位图如下所示。



(c) 价格水平固定的相位图



(d) 产出水平固定的相位图

汇率超调：当国外货币政策引起世界利率 r^* 上升时，$\dot{E}=0$ 曲线右移，从而导致汇率在短期内上升到更高的水平，并逐步调整收敛到新的均衡状态，利率随之降低，因此国外货币政策调整往往会导致本国汇率超调。

1.6.2 Y 外生，P, e 内生情形

给定产出水平外生的开放经济动态 *IS-LM* 模型：

$$
\begin{cases}
\dot{P} = \alpha(C(Y-T) + I(r) + G + NX(e\frac{\bar{P}}{P}) - Y) \\
\dot{e} = e(r(\frac{M}{P}, Y) - r^*)
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\alpha(0) = 0, \alpha' > 0 \\
r_{\frac{M}{P}} < 0, r_Y > 0
\end{cases}
$$

线性化系统表示为:

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases}
\dot{P} = -\alpha' NX' \frac{e\bar{P}}{P}(P-P^*) + \alpha' NX' \frac{\bar{P}}{P}(e-e^*) \\
\dot{r} = -e^* r_{\frac{M}{P}} \frac{M}{P^{*2}}(P-P^*)
\end{cases} \\
\Rightarrow &\begin{pmatrix} \dot{P} \\ \dot{e} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\alpha' NX' \frac{e\bar{P}}{P} & \alpha' NX' \frac{\bar{P}}{P} \\ -e^* r_{\frac{M}{P}} \frac{M}{P^{*2}} & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} P-P^* \\ e-e^* \end{pmatrix} \\
\Rightarrow &\begin{cases}
\lambda_1 + \lambda_2 = tr(A) = -\alpha' NX' \frac{e\bar{P}}{P} < 0 \\
\lambda_1 \cdot \lambda_2 = det(A) = \alpha' e^* r_{\frac{M}{P}} \frac{M}{P^{*2}} NX' \frac{\bar{P}}{P} < 0
\end{cases} \\
\Rightarrow &\lambda_1, \lambda_2 \text{ are one positive and one negative} \\
\Rightarrow &\exists (Y(0), e(0)) \neq (Y^*, e^*),\ \text{s.t.}\ \lim_{t\to\infty}(Y(t), e(t)) = (Y^*, e^*)
\end{aligned}
$$

同理，该种情况下的动力系统均衡点是鞍点稳定的，相位图如图所示。

1.6.3 先验系统和理性系统的稳定性

给定动态的 *IS-LM* 模型和动态的 *MF* 模型，两种系统存在完全不同的稳态:

1. 动态 *IS-LM* 是完全建立在 *ad-hoc* 基础上的模型，得到完全稳定的均衡状态；在 *ad-hoc* 模型下系统具有自发调节机制促使经济向均衡状态收敛。定义动力系统的完全稳定，对于任意的初始状态 (Y_t, r_t)，都会收敛到唯一的稳态点 (Y^*, r^*)。

2. 动态 *MF* 是建立在资本市场完备性（无套利条件）基础上的理性选择系统，得到鞍点稳定的均衡状态，存在单一的理性选择路径能够收敛到均衡。定义动力系统的鞍点稳定，存在特定的 (Y_0, r_0)，对于 (Y_t, r_t) 会收敛到 (Y^*, r^*)。

2 *Solow Model*

从古典模型到 *Keyness* 模型的过程中，尽管可以通过引入动态化过程考虑内生变量的决定及其比较静态分析，但是在 *Keyness* 的框架中，最关键的是没有长期的经济增长，讨论的是各经济变量的短期波动与均衡问题。从短期到长期的范式转换中，如何引入经济增长是至关重要的，突破性的工作来自于如下逻辑：**资本的动态化过程**，其逻辑思路表示为 $s \to I \to K$，即储蓄形成投资进而行程资本的动态过程，因而可以表示成 $\dot{K} + \delta K = I = sY$，从中可以看出投资是形成资本积累过程的关键所在，针对储蓄-投资关系，存在两类出发路径：

***Ramsey* 路径**：考虑微观个体的储蓄行为，通过个体的最优化储蓄与消费决定经济中的资本积累动态，此时储蓄是内生的；

***Solow* 路径**：假定储蓄率是严格外生的，此时投资等于 sY（*ad-hoc*），简化了对于储蓄行为的分析而将增长的重点放到动态积累过程中；

在 *Keyness* 的框架中，我们可以同时决定所有的 9 个内生变量；在 *Solow* 框架下，我们同样可以明确的是 Y, C, I, L, P, r, w 等内生变量，其中 L 一般假定劳动市场均衡，P 一般通过 *real economy* 不引入货币从而消除名义价格。

2.1 连续 *Solow* 模型：中央计划者经济

考虑一般形式的 *Solow* 模型，从资本动态积累方程出发考察人均（或劳均）资本存量的动态变化。

2.1.1 *Solow* 模型基本假定

Solow 模型依赖于如下四个基本假定：

1. $F(K, L)$ 是新古典生产函数；满足非负性、单调性、齐次性、凹性（意味着严格凹性）[8]、*Inada* 条件；表示为数学形式需要满足：

- $F(K, L) \geq 0, F(K, 0) = F(0, L) = 0$
- $F_K, F_L > 0, F_{KK}, F_{LL} < 0$
- $\lambda F(K, L) = F(\lambda K, \lambda L)$
- *Inada Condition*:

$$\begin{cases} \lim_{t\to 0} F_K = +\infty \\ \lim_{t\to +\infty} F_K = 0 \end{cases} \begin{cases} \lim_{t\to 0} F_L = +\infty \\ \lim_{t\to +\infty} F_L = 0 \end{cases}$$

2. 储蓄率 s 为常数；*Solow* 模型中无法完全内生化储蓄行为，即使可以将储蓄率内生化，例如 $s = s(y)$ 下尽管储蓄率的变量是内生决定的，但是储蓄行为不是个体自主决定的，因而储蓄行为依旧是外生的；

3. 劳动供给是人口总量的一个固定比例（劳动供给无弹性），即 $L = \phi P$；

4. 人口增长率固定，即 $\frac{\dot{P}}{P} = n$；

2.1.2 连续 *Solow* 模型

给定资本存量积累方程与人口动态：

$$\dot{K}_t = sY_t - \delta K_t, K_0 \tag{2.1}$$

$$\dot{L}_t = nL_t, L_0 \tag{2.2}$$

[8]关于新古典生产函数凹性的讨论：生产函数是凹函数，但并非严格的凹函数。给定齐次性条件 $F = F_K K + F_L L$, 二阶导条件为 $F_{KK}K + F_{KL}L = 0, F_{KL}K + F_{LL}L = 0$，相应的海塞矩阵 $det(H) = F_{KK}F_{LL} - K_{KL}^2 = 0$，因此新古典生产函数在满足齐次性的情况下不可能是严格凹函数。其次，给定生产函数的拟凹性质，生产函数必然满足凹函数性质。生产函数是凹函数但不是严格的凹函数，等价的表述是生产函数的 *Hessian* 矩阵是秩为 1 的负半定矩阵。

其中总资本存量的积累来自于净储蓄，进一步的来自于储蓄减去资本折旧后的剩余，*Solow Model* 的核心点在于通过固定的储蓄率将资本积累动态化；将总量资本存量积累方程转化为人均资本存量积累方程：

$$K = kL \to \dot{K}/K = \dot{k}/k + \dot{L}/L \to \dot{k}_t = sf(k_t) - (n+\delta)k_t \tag{2.3}$$

给定上述一维动力系统，如果知道生产函数的形式，则可以求解显式解或者讨论均衡解的稳定性：

- 如果该微分方程存在显式解，求解显式解并考察其均衡解的稳定性；一般情况下三种形式具备显式解：$y = Ak, y = Ak^{\alpha}, y = min\{\frac{k}{a}, \frac{1}{b}\}$；
- 如果该微分方程不具备显式解，利用动力系统的方式考察均衡解的存在性、唯一性和稳定性；如果均衡解是（局部）稳定[9]，可以利用均衡点来代替资本动态路径 $\{k_t\}_{t=0}^{\infty}$，并进行比较静态分析；

给定人均资本存量的均衡状态 k^*，可以确定 $Y^* = f(k^*), c = (1-s)f(k^*), r = f'(k^*), w = f(k^*) - k^*f'(k^*)$；[10]

Case：给定新古典生产函数为 $y_t = Af(k^t) = Ak_t^{\alpha}$，求解 *Solow* 模型中的 k_t 以及稳态 k^*

$$\dot{k}_t = sAk^{\alpha} - (n+\delta)k$$

令 $z = k^{1-\alpha}$，原方程转化为：

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= sA(1-\alpha) - (1-\alpha)(n+\delta)z \\
z_t &= Ce^{-(1-\alpha)(n+\delta)t} + \frac{sA}{n+\delta} \\
k_t &= [(k_0^{1-\alpha} - \frac{sA}{n+\delta})e^{-(1-\alpha)(n+\delta)t} + \frac{sA}{n+\delta}]^{\frac{1}{1-\alpha}} \\
\lim_{t\to\infty} k_t &= (\frac{sA}{n+\delta})^{\frac{1}{1-\alpha}} = k^*
\end{aligned}$$

2.1.3 均衡解的存在性、唯一性和稳定性

对于任意的增长系统，在没有办法求解显式解的时候，我们都需要利用动力系统的方法讨论均衡解的存在性、唯一性和稳定性问题，这是任何增长系统所必需做的工作；稳定性的讨论至关重要，连续系统（微分方程）需要考察特征根与 0 的关系，离散系统（差分方程）则需要考察特征根与 1 的关系。

给定一般形式的 *Solow* 模型：

$$\dot{k}_t = sf(k_t) - nk_t \tag{2.4}$$

接下来讨论均衡点的存在性、唯一性和稳定性问题：定义函数 $p(k) = \frac{f(k)}{k}, p'(k) = \frac{f'(k)k - f(k)}{k^2} < 0$[11]，因此函数在 $(0,\infty)$ 上单调递减

- **存在性**：根据 *Inada Condition*, $\lim_{t\to 0} p(k_t) = \lim_{t\to 0} f'(k_t) = +\infty, \lim_{t\to\infty} p(k_t) = \lim_{t\to\infty} f'(k_t) = 0$，给定 $\frac{n}{s} \in (0,\infty)$，对于连续函数 $p(k)$，根据介值定理，必然存在 k^*；
- **唯一性**：根据 $f(k_t)$ 的凹性，$p(k_t)$ 在 $(0,\infty)$ 上单调递减，均衡解 k^* 是唯一的；

[9] 均衡解的局部稳定性表明该动力系统在均衡点附近是稳定的，并不能导出全局稳定性，稳定性的线性展开系统只讨论均衡点附近的局部稳定性

[10] $r_t = \frac{\partial F}{\partial K_t} = L\frac{\partial f(k_t)}{\partial K_t} = Lf'(k_t)\frac{\partial k_t}{\partial K_t} = f'(k_t)$；利用新古典生产函数的齐次性质，$w_tL_t = Y_t - r_tK_t \to w_t = f(k_t) - k_tf'(k_t)$。

[11] 给定生产函数的凹性，可以得到 $f(0) - f(k) < (0-k)f'(k) \to kf'(k) < f(k)$

- **稳定性**：在均衡点处线性展开得到

$$\begin{aligned}\dot{k}^* &= (sf(k^*) - nk^*) + (sf'(k^*) - n)(k_t - k^*) \\ &= (sf'(k^*) - n)(k_t - k^*) \\ &= s\frac{k^*f'(k^*) - f(k^*)}{k^*}(k_t - k^*)\end{aligned}$$

其中考虑到 $k^*f'(k^*) - f(k^*) < 0$（生产函数的凹性），该均衡点是稳定的；

一般的，利用动力系统方法说明均衡解的性质，采用如下方式：

- 存在性和唯一性均利用新古典生产函数的性质（凹性和 *Inada Condition*）；一般情况下，给定新古典生产函数，均存在均衡解，但是均衡解的数量并不确定，例如引入内生储蓄率 $s(y)$ 的情况下，可能存在多个均衡解；

- 稳定性需要在均衡点附近进行一阶线性化展开，连续性函数需要考察线性系数是否小于 1；多个均衡点的情况需要逐一判定均衡点的稳定性；

2.1.4 资本黄金率水平 *Golden Rule*

资本积累黄金率[12]表示个体福利最优化状态下的储蓄水平和资本存量，其中福利使用个体消费水平度量。[13]

$$max_s\ c^* = (1-s)f(k^*) = f(k^*) - nf(k^*) \to FOC.f'(k_g) = n \tag{2.5}$$

给定上述一阶条件的解，进一步的需要讨论：解是多少以及解是不是全局最优解的问题?

第一，黄金率水平下的储蓄率水平是多少？只要使 $s = s_g$，那么 $k^* = k_g$，选择最优的储蓄率水平就可以收敛到黄金率水平上面，黄金率水平下的均衡由如下方程决定：

$$f'(k_g) = n, sf(k_g) = nk \to s_g = \frac{k_gf'(k_g)}{f(k_g)} \tag{2.6}$$

其中 $\frac{k_gf'(k_g)}{f(k_g)}$ 表示资本收入份额，在 CD 函数中可以表示为 α，即**最优的储蓄率水平等于资本收入份额**；

第二,该储蓄率水平能够保证人均消费是全局最优解吗?在新古典生产函数的假定下,考虑到 $f''(k) < 0$，因而一阶条件保证了取得最大值，但是 FOC 得到的是局部最大值；为了进一步说明 s_g 是黄金率对应的储蓄水平，需证明其为全局最优解。首先，给定 $s \in [0,1]$，考察连续函数 $\frac{\partial c^*}{\partial s}$ 在紧集 $[0,1]$ 上必有最大值，可能的最最值点仅有三个：$s = 0, s = 1, s = s_g$；其次，将可能的均衡解代入 c^* 比较可知 s_g 为最大值，因而其必然是全局最优解。

考察黄金率的经济含义：首先，黄金律表明资本存量是最优的均衡状态（稳态且最优）；其次，稳态均衡表明增加的资本存量带来的边际回报 $f'(k)k$ 等于新增加人口对于资本的分配或消费 nk；第三，最优的储蓄率水平达到资本回报份额（最优储蓄率）；第四，从中国的情况来看，实际储蓄率长期背离黄金储蓄率水平，储蓄偏高，高投资、低消费导致国民经济结构失衡。

2.1.5 比较静态分析

由于动力系统存在稳定的均衡点，可以利用均衡点来代替路径进行比较静态分析。下面分别考察 s, n 变化对于内生变量稳态的影响。对均衡状态求解全微分得到：

$$f(k^*)ds + sf'(k^*)dk^* = k^*dn + ndk^* \tag{2.7}$$

[12] *Phelps,1961,1963(AER)* 对黄金律水平做了详尽的分析。

[13] 黄金率的考察不是求解最优的资本存量水平 k_g，而是寻找最优的储蓄率水平，一旦给定最优的储蓄率水平，*Solow* 模型会自发的收敛到黄金率的资本存量水平。

- 考察 n 对于稳态的影响：令 $ds=0$，得到

$$\begin{aligned}
\frac{dk^*}{dn} &= \frac{k^*}{sf'(k^*)-n}<0;\ \frac{dy^*}{dn}=f'(k^*)\frac{dk^*}{dn}<0\\
\frac{dc^*}{dn} &= (1-s)f'(k^*)\frac{dk^*}{dn}<0\\
\frac{dr^*}{dn} &= \frac{df'(k^*)}{dn}=f''(k^*)\frac{dk^*}{dn}>0\\
\frac{dw^*}{dn} &= \frac{d(f(k^*)-k^*f'(k^*))}{dn}=-k^*f''(k^*)\frac{dk^*}{dn}<0
\end{aligned}$$

需要注意，人口增长的效应依赖于基本假定：人出生以后无限期的存活，因而人口增长会导致资源的挤出进而降低人均稳态资本存量。[14]

- 考察 s 对于稳态的影响：令 $dn=0$，得到

$$\begin{aligned}
&\frac{dk^*}{ds}>0, \frac{dy^*}{ds}>0, \frac{dr^*}{ds}<0, \frac{dw^*}{ds}>0\\
&\frac{dc^*}{ds}=(1-s)f'(k^*)\frac{\partial k^*}{\partial s}-f(k^*)
\end{aligned}$$

储蓄率对于人均消费的比较静态效应方向不确定。如果储蓄率优于黄金率水平 s^*（资本收入份额），则增加储蓄率会降低人均消费，反之则增加人均消费。因此储蓄率提高会导致人均资本存量、人均产出、工资水平提高，降低利率水平，对于人均消费（福利）的影响方向不确定，需要借助黄金律水平加以考察。

2.1.6 动态过渡

经济增长的动态过渡考虑的是从任意状态开始到稳态均衡的转移路径如何，其中需要考察两方面问题：其一是实然问题，即各经济变量的内生收敛路径如何，收敛反向和收敛速度如何确定？其二是应然问题，即收敛路径是否是 *Pareto* 最优的？简单起见，假定社会计划者最优化个体的效用，即最优化居民消费水平，因此居民消费水平的变动可以作为福利变化的分析工具。

考察储蓄率变化对于稳态资本存量以及人均消费的影响，其中短期效应反应为储蓄率对消费的直接影响 $(1-s)$；长期效应反应为储蓄对人均产出的影响 $\frac{\partial f(k)}{\partial s}$：

- $s>s_g$ 时，$k>k_g$，此时需要降低储蓄率水平以提高人均消费（左图1(e)）。降低储蓄率，即时效应表现为消费瞬时提高；长期效应表现为降低储蓄率导致资本存量和产出水平降低，人均消费水平随之降低，但是长期均衡的人均消费增加。从福利分析的角度看，任意时期的人均消费水平高于此前的均衡状态，因此这是 *Pareto* 改进过程，不损失每一期的消费；

- $s<s_g$ 时，$k<k_g$，此时需要提高储蓄率水平以提高人均消费（右图1(f)）。提高储蓄率，即时效应表现为消费瞬间降低；长期效应表现为人均产出增加，进而人均消费水平增加，最终高于原始的均衡状态。从福利分析的角度，初始时期的人均消费降低而后来时期的人均消费提高，存在代际中的福利转移，不容易讨论 *Pareto* 改进性质；

给定资本积累稳态水平，在稳态附近线性化展开，求解稳态点附近的收敛速度：

$$\dot{k}_t=(sf'(k^*)-n)(k_t-k^*)=-(1-s\frac{f'(k^*)}{n})n(k_t-k^*)=-(1-\frac{f'(k^*)k^*}{f(k^*)})(k_t-k^*) \tag{2.8}$$

其中 $\frac{f'(k^*)k^*}{f(k^*)}$ 表示生产函数中的资本收入份额，例如 *CD* 函数中收敛速度为 $-(1-\alpha)n$。首先确定收敛方向问题，给定 $sf'(k^*)-n<0$，当 $k_t<k^*$ 时，$\dot{k}>0$，表明资本存量水平增加；当 $k_t>k^*$ 时，$\dot{k}<0$，

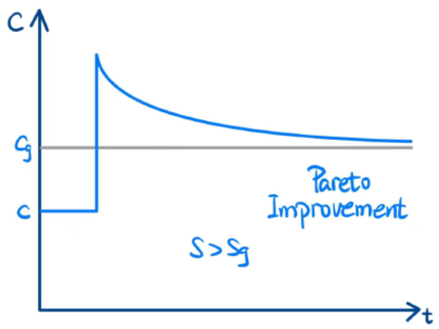
[14]对于人口的假设不贴合实际，后续引入了更多关于人口结构的假定，包括 *Sameulson*（*1958*）、*Diamond*（*1963 JPE*）建立的 *OLG* 模型。

表明资本存量水平减少，直到达到均衡状态，这也表明该均衡点是局部稳定的。其次考察（局部）收敛速度问题，在 *Solow* 模型中收敛速度表示为 $sf'(k^*)-n$，给定新古典生产函数的形式可以明确收敛速度。[15]

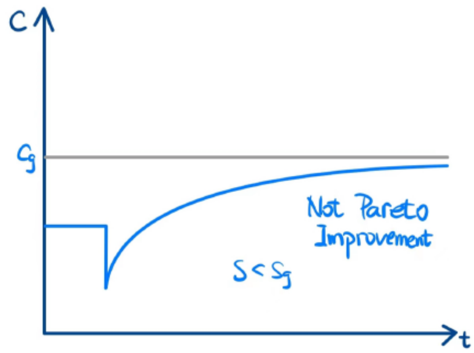
全局的收敛性质分析：给定如下增长速度关系式

$$\gamma_k=\frac{\dot{k}}{k}=s\frac{f(k)}{k}-n \tag{2.9}$$

其中给定新古典生产函数的凹性，定义 $g(k)=\frac{f(k)}{k},g'(k<0)$，距离均衡点越远则增长速度越快。



(e) $s>s_g$ 的收敛路径



(f) $s<s_g$ 的收敛路径

2.2 连续 *Solow* 模型：分散经济

宏观经济模型可以划分为两类基本形式：分散经济的一般均衡形式和中央计划者形式；其中分散经济的一般均衡模型建立在个体最优化和市场出清的均衡框架下，中央计划者经济则直接根据经济整体的资源约束进行最优化的资源配置。一般情况下，中央计划者经济是 *Pareto* 最优的。在完备市场的情况下，根据福利经济学第 I 和第 II 定理，可以证明分散经济和集中经济是等价的。

分散经济均衡框架建立在如下基础上：消费者在预算约束下决策，厂商在生产资源约束下进行决策，市场出清条件[16]。

2.2.1 消费者问题

假定同质化的代表性消费者，在给定的预算约束下进行决策。考察消费者的预算约束：给定任意时刻 t，假定资产为 A_t，收益为 rA_t，消费者收入表示为 $rA_t+w_tL_t$，消费者面临的预算约束表示为：假定储蓄率为常数 s

$$rA_t+w_tL_t\leq C_t+S_t\rightarrow\begin{cases}C_t=(1-s)(rA_t+wL_t)\\S_t=s(rA_t+wL_t)\end{cases} \tag{2.10}$$

消费者财富积累动态表示为：

$$c_t=(1-s)(r_tA_t+w_tL_t) \tag{2.11}$$

$$\dot{A}_t=s_t=s(r_tA_t+w_tL_t) \tag{2.12}$$

$$\dot{L}_t=nL_t \tag{2.13}$$

[15]在这里给出的是稳态点附近的均衡收敛速度，而非全局收敛速度，一般而言，距离均衡状态越远的点收敛速度越快。

[16]给定劳动力市场出清，三个市场中只需要资本市场出清 $A=K$，即居民持有的资产和厂商对于投入资本的需求是一致的，即可保证产品市场出清。

2.2.2 厂商问题与市场均衡

给定生产者的利润最大化问题[17]：

$$max_{k_t,l_t}\ F(K,L) - r_tK_t - w_tL_t \tag{2.14}$$

$$r_t = \frac{\partial F}{\partial K_t} = f'(k_t); w_t = \frac{\partial F}{\partial L_t} = f(k_t) - k_tf'(k_t) \tag{2.15}$$

给定资本市场均衡条件:

$$A_t = K_t \tag{2.16}$$

给定均衡条件, 根据新古典生产函数的齐次性质得到:

$$\dot{K} = \dot{A} = s(r_tA_t + w_tL_t) = s(\frac{\partial F}{\partial K_t}K_t + \frac{\partial F}{\partial L_t}L_t) = sF(K,L) \tag{2.17}$$

可以看出，在没有资本折旧的情况下，分散经济等于中央计划者经济。

如果存在资本折旧，那么厂商行为出现如下调整：

$$max_{k_t,l_t}\ F(K,L) - (r_t+\delta)K_t - w_tL_t \tag{2.18}$$

此时分散经济均衡与中央计划者经济存在差异。

2.2.3 分散经济 *Solow Model*

Consumer:

$$\begin{aligned}
&rA_t + wL_t = C_t + S_t \text{ (Budget Constraint)} \\
\Rightarrow &\begin{cases} C_t = (1-s)(rA_t + wL_t = C_t + S_t) \\ S_t = s(rA_t + wL_t = C_t + S_t) \end{cases} \\
\Rightarrow &\dot{A}_t = s(rA_t + wL_t), \dot{L}/L = n
\end{aligned}$$

Producer:

$$\begin{aligned}
&\max F(K_t, L_t) - rK_t - wL_t \\
\Rightarrow &\begin{cases} F_K = r \\ F_L = w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = f'(k) \\ w = f(k) - kf'(k) \end{cases}
\end{aligned}$$

Market Equilibrium:$(K_t = A_t)$

$$\begin{aligned}
&\dot{K} = s(rA_t + wL_t) \\
&\dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{K}{L}\frac{\dot{L}}{L} = sf(k) - nk
\end{aligned}$$

2.3 拓展形式的 *Solow* 模型

Solow 模型提供了基本的分析框架，但是在经济增长源泉、居民储蓄行为、技术进步形式等多个问题上无法提供深入的回答，因而需要对其基本假设进行修订，重新引入更多的参数来贴合现实世界的变化。当然，如果在 *Solow* 模型的框架中可以通过引入更多合理的假设使其具备更丰富的解释力，不需要引入后续的内生增长模型，事实证明，*Solow* 模型的解释力即使在引入多个假设之后也存在问题，因而探讨更具洞见的经济增长理论成为必须。

[17]其中产品价格单位化为 1，要素价格为相对产品价格，因此 *Solow* 模型目前是纯实体经济模型，不引入任何的货币因素。

2.3.1 引入技术进步

如何在生产函数中引入技术进步是首要的问题。一般而言，可以划分为三种技术进步形式：*Hicks* 中性、*Harrod* 中性（劳动扩增）和 *Solow* 中性（资本扩增）。得益于 *Uzawa* 的证明[18]，只有 *Harrod* 中性的技术进步形式才会产生稳态，因而在这里我们均讨论 *Harrod* 中性的技术进步。

给定引入生产技术进步的 *Solow Model* 基本设定：

$$
\begin{cases}
Y = F(K, AL) \\
s = \text{const.} \\
L = \varphi p, \varphi = \text{const.} \\
\dot{p} = np, p(0) \\
\dot{A} = xA, A(0)
\end{cases}
\begin{cases}
F(K, AL) \text{ Harrod Neutral} \\
F(AK, L) \text{ Solow Neutral} \\
F(AK, AL) \text{ Hicks Neutral}
\end{cases}
$$

将总量资本积累动态转化为有效人均资本积累动态：

$$
\begin{aligned}
\hat{k} &\equiv \frac{K}{AL}, \hat{y} \equiv \frac{y}{AL}, \hat{c} \equiv \frac{C}{AL} \\
\dot{\hat{k}} &= \left(\frac{\dot{K}}{AL}\right) = \frac{\dot{K}}{AL} - \frac{K}{(AL)^2}(\dot{A}L + A\dot{L}) \\
&= \frac{sf(K, AL) - \delta K}{AL} - \frac{K(xAL + nAL)}{(AL)^2} \\
&= sf(\hat{k}) - (\delta + x + n)\hat{k}
\end{aligned}
$$

下面判定均衡解的存在性、唯一性和稳定性：

$$
\begin{cases}
\lim_{\hat{k}\to 0} \frac{f(\hat{k})}{\hat{k}} & = \lim_{\hat{k}\to 0} f'(\hat{k}) = +\infty \\
\lim_{\hat{k}\to +\infty} \frac{f(\hat{k})}{\hat{k}} & = \lim_{\hat{k}\to +\infty} f'(\hat{k}) = 0
\end{cases}
\qquad
\frac{\partial(f(\hat{k})/\hat{k})}{\partial \hat{k}} = \frac{f'(\hat{k}) - f(\hat{k})/\hat{k}}{\hat{k}} < 0
$$

一维非线性动力系统线性化展开得到：

$$
\begin{aligned}
&\dot{\hat{k}} = (sf'(\hat{k}^*) - (\delta + x + n))(\hat{k} - \hat{k}^*) \\
\Rightarrow & s'f(\hat{k}^*) - (\delta + x + n) = s(f'(\hat{k}) - f(\hat{k})/\hat{k}) < 0 \Rightarrow \hat{k}^* \ \textit{Stable}
\end{aligned}
$$

此时黄金率水平表示为：

$$
\begin{aligned}
&\max_s c^* = A(1-s)f(\hat{k}^*) = A(f(\hat{k}^*) - (\delta + x + n)\hat{k}) \\
\Rightarrow & s_g = \frac{f'(\hat{k}_g^*)k_g^*}{f(\hat{k}_g^*)}
\end{aligned}
$$

注意：*Solow* 模型虽然引入了技术进步，但是一方面技术进步是完全外生的由参数 x 决定，另一方面技术进步具体包含哪些因素不清晰，是一个参数的黑箱，难以直接应用到实际政策，此时的生产技术依旧是“外生”的。在此基础上，内生增长模型将技术进步进一步利用研发投入等形式进行内生刻画（*Jones, 1995*）。

2.3.2 异质储蓄率

考虑消费者对于资本和劳动收入存在两类储蓄率 $s_r, s_w, s_r > s_w$，资本储蓄率高于劳动储蓄率。考察分散经济的一般均衡问题：给定消费者行为

$$\dot{A} = S = s_r rA + s_w wL \tag{2.19}$$

$$C = (rA + wL) - (s_r rA + s_w wL) = (1 - s_r)rA + (1 - s_w)wL \tag{2.20}$$

[18] *Acemoglu*（*2002ECMA*）进一步证明了不同技术进步形式的生产函数具备稳态增长路径的情形。

给定厂商行为

$$r=f'(k_t),w=f(k_t)-k_tf'(k_t) \tag{2.21}$$

市场均衡表示为 $A=K$，因此经济中的资本积累动态表示为

$$\begin{aligned}\dot{k}&=s_rrk+s_ww-nk &(2.22)\\&=s_rf'(k)k+s_w(f(k)-kf'(k))-nk &(2.23)\\&=s_wf(k)+(s_r-s_w)f'(k)k-nk &(2.24)\end{aligned}$$

具体的，该模型表示为:

$$\begin{aligned}&Consumer\text{: } \dot{A}=s_rrA+s_wwL\\&Firm\text{: } \max_{K,L}F(K,L)-rK-wL\Rightarrow\begin{cases}r=f'(k)\\w=f(k)-f'(k)k\end{cases}\\&Equi.\dot{K}=s_rf'(k)K+s_w(f(k)-f'(k)k)L\\&\Rightarrow\dot{k}=s_wf(k)+(s_r-s_w)f'(k)k-nk\end{aligned}$$

下面讨论均衡解的存在性、唯一性和稳定性:

$$\begin{cases}\lim_{k\to 0}g(k)=+\infty\\\lim_{k\to+\infty}g(k)=0\end{cases}\qquad\frac{\partial g(k)}{\partial k}=s_w\frac{1}{k}\left(f'(k)-\frac{f(k)}{k}\right)+(s_r-s_w)f''(k)<0$$

线性化展开得到:

$$\begin{aligned}&\dot{k}=(s_wf'+(s_r-s_w)(f'-f''k^*)-n)(k-k^*)\\&\Rightarrow s_rf'+s_wf''k^*-n\\&\quad=s_rf'+s_wf''k^*-s_w\frac{f}{k^*}-(s_r-s_w)f'\\&\quad=s_w(f'-\frac{f}{k})+(s_r-s_w)f''k^*\\&\Rightarrow s_w(f'-\frac{f}{k})+(s_r-s_w)f''k^*<0\end{aligned}$$

该均衡点是稳定的，因而可以使用均衡点进行比较静态分析:

$$\begin{aligned}0=&\left(\frac{f(k^*)}{k^*}-f'(k^*)\right)ds_w+f'(k^*)k^*ds_r\\&-k^*dn+\underbrace{(s_wf'(k^*)+(s_r-s_w)(f'+f''k^*)-n)}_{A<0}dk^*\\\Rightarrow&\begin{cases}\frac{dk}{ds_w}=\frac{f'(k^*)-f(k^*)/k^*}{A}>0\\\frac{dk}{ds_r}=\frac{-f'(k^*)k^*}{A}>0\\\frac{dk}{dn}=\frac{k^*}{A}<0\end{cases}\end{aligned}$$

比较静态分析表明，储蓄率提高导致资本存量增加，这与基准 *Solow Model* 不存在差异。

考察资本黄金率水平:

$$\begin{aligned}max_s\ c(s_r,s_w)&=(1-s_r)r^*k^*+(1-s_w)w^* &(2.25)\\&=(1-s_r)k^*f'(k^*)+(1-s_w)[f(k^*)-k^*f'(k^*)] &(2.26)\\&=f(k^*)-nk^* &(2.27)\end{aligned}$$

可以得到黄金律水平与基准模型保持一致，可知引入异质性储蓄率并不能带来更多的洞见。

2.3.3 储蓄率与收入相关：$s = s(y)$

考虑消费者针对不同的收入存在不同的储蓄率水平，将储蓄率内生化为 $s(y)$。注意：这种情况下储蓄行为依旧是外生的，属于完全的 *ad-hoc* 设定，并非来自于将储蓄行为内生化得到的结果，实质上并未内生化储蓄率，真正将储蓄行为内生化来自于 *Ramsey* 模型。

给定模型设定：

$$\begin{cases} Y = F(K, L) \\ s = s(y), s' > 0 \\ L = \varphi p, \varphi = \text{const.} \\ \dot{p} = np, p(0) \end{cases}$$

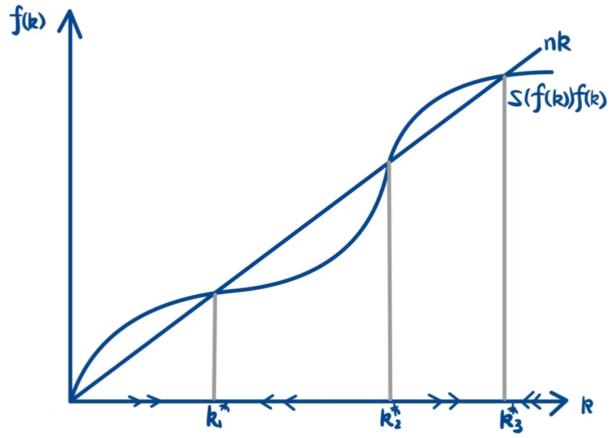
人均资本积累动态表示为:

$$\dot{k} = s(f(k))f(k) - nk$$

根据新古典函数的性质，均衡点存在性易证，但是均衡点的个数和稳定性则不确定，需要针对单个均衡点的稳定性进行分析。首先，给出均衡点个数的定理，对于新古典生产函数，非 0 的均衡点个数是奇数个 (*Mas-Collel*)。其次，针对单个均衡点分析稳定性。不妨假设上述系统存在三个均衡点，将动力系统在均衡点处线性化展开得到：

$$\dot{k} = [(s(k)f(k))' - n](k - k^*) \tag{2.28}$$

据此 k_i^* 稳定等价于 $(s(k)f(k))' < n$（斜率关系），因此奇数均衡点是稳定的，偶数均衡点是不稳定的。当引入储蓄率的内生化时，系统存在多重均衡，并且具有稳定均衡和不稳定均衡，这意味着不同的初始状态会收敛到完全不同的均衡点。实际中对应的情形就是贫困陷阱，当资本存量属于 (k_1, k_2) 时，资本存量朝着 k_1 收缩到稳态，因此会持续贫困化而无法跳脱。对应的政策含义就是 *big push*，促使人均资本存量水平跳跃到 (k_2, k_3) 区间内，从而自发收敛到更高水平的稳态 k_3。



2.3.4 常数弹性的劳动供给：$L = \phi(w)P$

考虑劳动力供给不再是总人口的固定比例，而是取决于工资收入，工资收入越高，劳动力供给比例越高，$L = \phi(w)P, \phi'(w) > 0$。考察劳动力供给动态：

$$\frac{\dot{L}}{L} = \frac{\phi'(w)}{\phi(w)}\dot{w} + \frac{\dot{P}}{P} \tag{2.29}$$

$$= \frac{\phi'(w)w}{\phi(w)}\frac{w'(k)k}{w(k)}\frac{\dot{k}}{k} + n = \varepsilon_w \varepsilon_k \frac{\dot{k}}{k} + n \tag{2.30}$$

其中 ε_w 表示劳动供给的工资弹性，ε_k 表示工资的资本弹性，考虑人均状态下的资本存量积累动态：

$$\dot{k} = \frac{sf(k) - n}{1 + \varepsilon_w \varepsilon_k} \tag{2.31}$$

可以证明该动力系统存在唯一的、稳定的均衡点，且该均衡点与一般模型一致，即 $sf(k^*) = nk^*$：

$$\begin{cases} \lim_{k\to 0} \frac{f(k)}{k} = \lim_{k\to 0} f'(k) = +\infty \\ \lim_{k\to +\infty} \frac{f(k)}{k} = \lim_{k\to +\infty} f'(k) = 0 \end{cases} \qquad \frac{\partial(f(k)/k)}{\partial k} = \frac{f'(k) - f(k)/k}{k} < 0$$

线性化展开得到：

$$\begin{aligned} \dot{k} &= \frac{sf'(k^*) - n}{1 + \varepsilon_\varphi \varepsilon_k}(k - k^*) \\ \Rightarrow & s'f(k^*) - n = s(f'(k) - f(k)/k) < 0 \Rightarrow k^* \ Stable \end{aligned}$$

进一步的可以利用均衡点进行比较静态分析：

$$\begin{aligned} & f(k^*)ds + (sf'(k^*) - n)dk^* - k^*dn = 0 \\ \Rightarrow & \begin{cases} \frac{dk^*}{ds} = \frac{-f(k^*)}{sf'(k^*)-n} > 0 \\ \frac{dk^*}{dn} = \frac{k^*}{sf'(k^*)-n} < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

黄金率水平表示为：

$$\begin{aligned} & \max_s c^* = (1-s)f(k^*) = A(f(k^*) - nk) \\ \Rightarrow & s_g = \frac{f'(k_g^*)k_g^*}{f(k_g^*)} \end{aligned}$$

需要注意，此时 k 表示资本劳动比，而非人均资本存量。在此种情况下，人均变量 $\frac{Y}{P}$ 和劳均变量 $\frac{Y}{L}$ 发生分离，需要对比一般模型和该模型均衡人均变量的差异性。可以证明，均衡的劳均变量 $\frac{K}{L}$ 保持一致，但是该模型的人均变量相比于基准模型出现了降低，这是因为收入增加会调节劳动供给增加，导致人均资本存量降低。

考察该系统均衡点与 *benchmark* 模型均衡点的关系：其中 $L_t = \phi(w)P_t$

a). 给定相同的均衡状态 $sf(k^*) - nk^* = 0$ 可以确定唯一的均衡解 k^*，因而两种情况下均衡的资本-劳动比 k^*、产出-劳动比 y^*、消费-劳动比 c^*、均衡利率 r^* 和工资 w^* 均相同；

b). 相对于 *benchmark* 模型，$Y/K = \frac{n}{s}$、劳动收入份额 $\frac{wL}{Y} = 1 - k^*\frac{f'(k^*)}{f(k^*)}$、资本收入份额 $\frac{rK}{Y} = k^*\frac{f'(k^*)}{f(k^*)}$ 均相同，但是人均存量发生了显著变化；$\frac{K}{P} = \phi(w^*)k^*, \frac{Y}{P} = \phi(w^*)y^*, \frac{C}{P} = \phi(w^*)c^*$，考虑到 $\phi(w) \in (0,1)$[19]，该模型中均衡的人均资本存量、人均产出和人均消费相比于 *benchmark* 模型均出现了下降。

2.3.5 人口随机冲击的随机 *Solow* 模型

Merton (1975,RES)[20]将人口的随机冲击引入 *Solow* 模型[21]，建立随机增长模型，给定如下设定：

$$\frac{\dot{L}}{L} = ndt + \sigma dz \tag{2.32}$$

定义 $\phi(K,L) = \frac{K}{L}$, 则人均资本积累动态表示为：

$$\dot{k} = \phi(K + \Delta K, L - \Delta L) - \phi(K, L) \tag{2.33}$$

$$= \phi(K,L) + \phi_K(K,L)dK + \phi_L(K,L)dL + \frac{1}{2}\phi_{KK}(K,L)(dK)^2 + \tag{2.34}$$

$$+ \frac{1}{2}\phi_{LL}(K,L)(dL)^2 + \phi_{KL}(K,L)dKdL + 0(\cdot) - \phi(K,L) \tag{2.35}$$

[19]劳动供给始终小于总人口数量

[20]参考动态优化方法（龚六堂）

[21]同时可以考虑技术进步随机冲击的随机 *Solow* 增长模型。

其中 $(dt)^2 = dtdz = 0, (dz)^2 = dt$[22]，相应的我们得到

$$dK = (sF(K,L) - \delta K)dt, dL = (ndt + \sigma dz)L \tag{2.36}$$

$$(dK)^2 = 0, (dKdL) = 0, (dL)^2 = \sigma^2 L^2 dt \tag{2.37}$$

代入人均资本积累动态方程得到

$$\dot{k} = (sf(k) - \delta)dt - (nkdt + \sigma kdz) - \sigma^2 kdt \tag{2.38}$$

$$= (sf(k) - (n+\delta)k + \sigma^2 k)dt - \sigma kdz \tag{2.39}$$

如上给出了随机增长模型下人均资本积累动态方程，可以据此求解稳态。对于复杂的非线性系统，根据对数线性化方法得到线性化解。

2.4 *Solow* 模型对于经济增长的解释

2.4.1 增长核算

任意变量的增长率定义为 $\gamma_k = \frac{\dot{k}}{k}$，假定生产函数为 *CD* 函数形式，一般 *Solow* 模型中的增长核算表示为 $\gamma_y = \alpha\gamma_k + (1-\alpha)\gamma_l$。考虑到 $\dot{k} = 0$，因此稳态的人均资本存量和人均产出不增长。总资本存量表示为 $\gamma_K = \gamma_k + \gamma_L = n$，即总量按照人口增长率进行增长（只具有水平效应而不具备增长效应）。一般的 *Solow* 模型对于增长的解释与现实存在极大的出入，总量增长只能来自于人口增长，这就需要引入更多现实的因素来对模型进行校准。直到模型无法更好的贴合现实中的技术进步增长形式时，引进内生增长模型刻画现代经济增长。

2.4.2 比较收敛和绝对收敛

除了国家内部的经济增长源泉分析，另一个重点是国家间的收敛比较问题。无论何种收敛情况，两国收敛速度取决于初始状态与均衡状态的差异（收敛速度取决于相对位置）。*Mankiw*（*1992 QJE*）研究表明国家间以条件收敛为主。[23]

绝对收敛（***absolute convergence***）表示两个国家如果存在相同的文化 n 和技术 A，具有相同的稳态水平 $k^*_{pool} = k^*_{rich}$，则必然有 $\gamma_{pool} > \gamma_{rich}$，穷国的收敛速度更快。

条件收敛（***conditional convergence***）表示两国具有相同的文化和技术，但是具有不同的稳态水平 $k^*_{pool} \neq k^*_{rich}$，则 $\gamma_{rich} > \gamma_{pool}$，富国收敛速度更快。

2.5 引入财政政策的 *Solow* 模型

2.5.1 模型设定

财政政策主要包括：政府如何收钱（最优税收理论）、政府如何花钱（最优公共支出理论）以及政府规制（自然垄断企业的市场规制问题）。首先考察税收体系[24]：

1. 收入税：包括资本收入税 $\tau_r rA$ 和劳动收入税 $\tau_w wL$；*Mirrless(1971RES)* 给出了最优收入税理论；
2. 消费税：针对产品征收的消费税 $\tau_c C$；*Ramsey(1929EJ)* 给出了最优消费税理论

[22]随机过程的 *Ito* 伊藤微积分

[23]**中国区域收敛性问题**：对应到中国的情况中，需要考察的是中国各区域的收敛是条件收敛还是绝对收敛？条件收敛和绝对收敛具有完全不同的政策含义，绝对收敛表明收入差距最终可以依靠自由市场的增长而消除，但是条件收敛则表明收入差距会扩大。*Stiglitz*（*1969EJ*）分析了经济增长中的收入不平等问题，指出在市场完备的情况下，初始不平等会自发消失；但是如果存在各种市场失灵，不平等的扩散则是非常复杂的。

[24]在 *Mirrless* 给出了最优税收理论后，*Lucas(1990 Oxford)* 和 *Barro(1990JPE)* 重新讨论了宏观公共财政理论，并引导了后续公共财政的发展。

3. 财产税：针对个人总财产征收的财产税 $\tau_A A$；

政府的总体税收表示为 $T=\tau_r rA+\tau_w wL+\tau_c C+\tau_A A+\tau$，其中 τ 表示针对个体的一揽子税收。

给定模型的基本设定：

$$\begin{cases} Y=F(K,L) \\ s=\text{const.} \\ L=\varphi p,\varphi=\text{const.} \\ \dot{p}=np,p(0) \end{cases} \begin{cases} \text{Income Tax: } \tau_r,\tau_w \\ \text{Consumption Tax: } \tau_c \\ \text{Asset Tax: } \tau_A \end{cases}$$
$$T=\tau_r rA+\tau_w wL+\tau_c C+\tau_A A$$

2.5.2 分散经济均衡

给定分散经济下的一般均衡问题[25]，考察针对收入税的影响，假定 $\tau_l=\tau_r=\tau,T=\tau(rA+wL)$：

代表性消费者问题表示为

$$rA+wL-T=C+S \tag{2.40}$$

其中假定消费者可支配收入为 $rA+wL-T$, 储蓄率为可支配收入的比例 s，消费者行为给定为[26]

$$\dot{A}=S=s(rA+wL-T),\frac{\dot{L}}{L}=n \tag{2.41}$$

生产者问题并未发生改变，最优条件给定为：[27]

$$r=f'(k);w=f(k)-kf'(k) \tag{2.42}$$

引入政府行为，假定政府任意时刻都是预算平衡 $T=G$。给定市场均衡条件，资本市场均衡 $A=K$，根据 walras 规则，其余市场达到均衡。考察均衡条件：

$$\dot{K}=s(rA+wL-T)=s(F(K,L)-G)\to\dot{k}=sf(k)-nk-sg \tag{2.43}$$

其中 $g=\frac{G}{L}$。

考察均衡点 k^* 的存在性、唯一性和稳定性，并分析 g 对稳定均衡点各内生变量的影响。首先，均衡点的存在性一般取决于 g 的大小，如果 g 极大 $(g>w^*)$ 的时候不存在均衡点；随着 g 的减小会出现一个均衡点（相切）$(g=w^*)$、两个均衡点 $(0<g<w^*)$ 的情况，其中两个均衡点的情况下必然存在 k_2^* 稳定，k_1^* 不稳定（$k_1^*<k_2^*$），此时我们需要具体考察两个均衡点的稳定性，同时比较静态分析建立在稳定的均衡点上面，不稳定均衡点不需要进行讨论[28]。

Proof: *首先确定均衡解的存在性、唯一性和稳定性，给定均衡状态*

$$\dot{k}_t=0\to sf(k_t)=nk_t+sg$$

定义函数 $h(k)=f(k)-\frac{n}{s}k,h'(k)=f'(k)-\frac{n}{s}$ *,根据 Inada Condition 可知* $\lim_{t\to 0}h'(k)\to\infty,\lim_{t\to\infty}h'(k)=-\frac{n}{s}<0$*，根据零点定理必然存在* $\bar{k}$ *使得* $h'(\bar{k})=0$*，在* $(0,\bar{k})$ *上* $h(k)$ *单调增加，在* $(\bar{k},\infty)$ *单调减少。*

1. 存在性：考虑 $\lim_{t\to 0}h(k)\to 0,\lim_{t\to\infty}h(k)\to-\infty$*；函数* $h(k)$ *在* $(0,\infty)$ *上先单调增加后单调减小，为了确定解的存在性，需要比较* $h(\bar{k})$ *与* g *的大小关系。给定* $g-(f(\bar{k})-\frac{n}{s}\bar{k})=g-(f(\bar{k})-\bar{k}f'(\bar{k}))<0$*，因此必然存在均衡解；*

[25]分析经济中引入财政货币政策时，利用分散经济的一般均衡模型更容易进行分析，可以清楚的界定政策对于消费者、生产者、政府三部门的影响，并与最优的中央计划者经济进行对比，分析政策带来的宏观经济效应。

[26]消费者行为的基本设定：储蓄等于消费者资产积累动态，给定储蓄的基本函数关系就可以确定资本积累动态。

[27]如果针对消费者征税，模型中就不需要对生产者征税，否则会导致重复征税问题；因此实际建模中只需要针对一方进行征税。

[28]HW7 第 1 题考察均衡点的几种状态，多均衡时需要对每个均衡点进行稳定性分析。

2. 唯一性：根据 $h(k)$ 的性质，在 $(0,\infty)$ 上必然存在两个均衡点 $k_1^*, k_2^*(k_1^* < \bar{k} < k_2^*)$；

3. 稳定性：在均衡点附近线性展开得到

$$\dot{k} = (sf'(k^*) - n)(k_t - k^*)$$

给定新古典生产函数的凹性，对于均衡点 k_1^*，有 $sf'(k_1^*) - n > 0$，因此均衡点 k_1^* 是不稳定的；对于均衡点 k_2^*，有 $sf'(k_2^*) - n < 0$，因此均衡点 k_2^* 是稳定的。

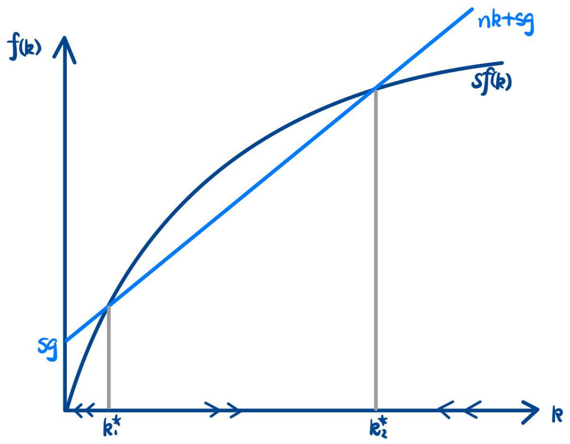


图 1: 引入财政政策后的 *Solow Model*

比较静态分析表明，g 增加会导致稳态人均资本存量和人均产出降低，$\frac{k^*}{g} < 0, \frac{y^*}{g} < 0$，与 IS-LM 模型截然不同。**直观的解释在于原始 *Solow* 模型中储蓄全部用来积累和投资，但是现在的积累动态表明储蓄除了用来积累，还需要拿出一部分用来给政府支出**，但是对于经济积累无效，因而相当于扔掉一块经济资源用于积累，导致资本积累稳态降低。

2.5.3 公共支出进入生产函数

上述模型简单的将政府支出直接引入而不产生任何作用（不具有生产性而只具备消费型），因而导致公共财政支出增加降低了人均产出，与现实存在较大差距，我们需要引入政府支出对经济的作用来修正模型。*Arrow and Kwrz(1970)* 考察了政府公共支出在经济中的角色[29]：

1. 纳入生产函数：$y = f(k,g), f_g > 0, f_{kg} > 0$，即政府支出可以有效提高私人生产的效率；

2. 纳入消费函数：$u = u(c,g)$，即政府支出可以提高私人的效用，例如修建公园等公共基础设施等；

3. 除了私人资本 k，政府可以利用公共支出积累公共资本 k_g；一般只有公共资本进入生产函数 $f(k,k_g)$，公共资本和公共支出进入效用函数 $u(c,g,k_g)$。

考虑公共支出进入生产函数的 *Solow* 模型，假定 $f_g > 0, f_{gg} < 0, f_{kg} > 0$，人均资本积累动态方程表示为[30]：

$$\dot{k} = sf(k,g) - nk - sg \tag{2.44}$$

[29] 关键的不是模型如何求解，是模型设定以及关键因素如何进入模型！

[30] 其中 *Barro* 引入了比例参数 $\phi \in (0,1)$ 将公共支出引入生产函数 $f(k,\phi g)$，并进一步指出民主国家的 ϕ 较高，从而考察了公共支出的政治经济学问题。

可以证明该动力系统存在稳定的均衡解。考察公共支出对于稳态资本存量的影响

$$\frac{dk^*}{dg}=\frac{s(1-f_g)}{sf_k-n},\frac{dy}{dg}=f_k\frac{dk}{dg}+f_g=\frac{sf_k-nf_g}{sf_k-n} \tag{2.45}$$

影响方向不确定，取决于 f_g 与 1 的关系，即政府支出对于私人生产率提高的作用大到什么程度。考虑到分母中 $sf(k^*)-n<0$，则 $f_g>1$ 时（财政支出对私人生产的边际效应大于 1），财政政策才会促进资本存量的提高。因而这意味着：必须要确定政府支出对私人生产的提高作用有多大，才能明确政府支出对经济的促进作用。

存在政府公共支出的情况下，黄金律是否依旧成立？仍然是成立的，即资本存量的边际生产率等于人口增长率 $f'(k^*)=n$。黄金律之所以成为黄金律，是因为在多种模型环境下都是成立的（龚六堂）。

2.6 引入货币政策的 *Solow* 模型

货币政策首先应该讨论的问题是实体经济中为何会存在货币，其次讨论货币的供应政策如何影响稳态下的经济变量。首先，货币的存在性是宏观经济学的重要问题，目前主要包括如下思路将货币的存在性引入实体经济：

- *Samuelson(1958)* 建立 OLG 模型引入货币：经济中存在不同代际之间的交换需要，货币的出现起到了交换中介的作用（*OLG* 中允许泡沫均衡的存在）；
- *Sidrauski* 分别在 *Solow* 模型和 *Ramsey* 模型基础上引入货币，基本思路是在效用函数中引入货币（*MIU*），该思路的问题在于缺乏微观基础；
- *Chower(1963)* 建立的 *CIA*（*cash-in-advance*）模型，考虑现金流优先在经济交易中的作用，基本思路等同于将货币纳入效用函数；
- 货币的搜寻匹配模型；

2.6.1 *Tobin Framework*

Tobin(1965ECMA) 首先给出了纳入货币政策的模型，并给出了 *Mundell-Tobin* 效应（货币是非中性的，货币水平提高可能会导导致产出水平提高）。

消费者问题：消费者资产不仅包含企业的实物资本 K，还包含货币 M；货币的回报率可以作如下处理：货币名义回报率 *(Sidrauski,1967AER)* 是 0（名义购买力不变），货币实际回报率 *(Tobin,1965ECMA)* 是 $(-\pi)\frac{M_t}{P_t},\pi=\frac{\dot{P}}{P}$，利用名义和实际回报率处理均可以，但是在离散间情况下存在货币等价问题，连续时间上我们不考虑如上问题。消费者劳动收入表示为 w_tL_t，消费者实际总收入表示为：

$$r_tK_t+(-\pi)\frac{M_t}{P_t}+w_tL_t \tag{2.46}$$

$$A_t=K_t+M_t/P_t \tag{2.47}$$

其中均为实际回报率。假定储蓄率等于常数，并用来增加资产，给定资产积累动态为：

$$\dot{A}=\dot{K}_t+(\frac{\dot{M}_t}{P_t})=s(r_tK_t+(-\pi)\frac{M_t}{P_t}+w_tL_t+X) \tag{2.48}$$

$$\dot{L}_t=nL_t \tag{2.49}$$

给定**厂商行为**：最优化生产决策，由于供给侧未发生变化，最优条件与基准模型一致

$$r_t=f'(k_t);w_t=f(k_t)-k_tf'(k_t) \tag{2.50}$$

给定**政府行为**：政府发行货币得到铸币税收入（假定铸币不具有成本），其支出包括公共支出 G 和转移支付 X，预算约束均衡为

$$\frac{\dot{M}}{P} = X + G \tag{2.51}$$

其中货币供应为 $\theta = \frac{\dot{M}}{M}$，用来表示货币政策或者货币量的发行。

市场均衡条件下给定总量的 $Solow$ 模型：

$$\dot{K} + (\frac{\dot{M}}{P}) = s(rK + wL - \pi\frac{M}{P} + X) \tag{2.52}$$

$$\dot{L} = nL \tag{2.53}$$

$$r = f'(k), w = f(k) - kf'(k) \tag{2.54}$$

$$\frac{\dot{M}}{M} = \theta \tag{2.55}$$

$$\frac{\dot{M}}{P} = X + G \tag{2.56}$$

假定 $G = 0$，$X = \frac{\dot{M}}{P} = \theta\frac{M}{P}$ 进一步可以处理为：

$$\dot{K} + (\frac{\dot{M}}{P}) = s(F(K, L) - \pi\frac{M}{P} + \theta\frac{M}{P}) \tag{2.57}$$

转化为人均资本存量的积累动态：定义人均资本存量 $k = \frac{K}{L}, \dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} - nk$；定义人均实际货币持有量 $m = \frac{M}{PL}, \dot{m} = \frac{(\dot{M/P})}{L} - nm$；定义人均转移支付 $x = \frac{X}{L} = \frac{\dot{M}}{PL} = \frac{\dot{M}}{M}\frac{M}{PL} = \theta m$；根据一般均衡条件 $rK + wL = f(k)$，人均化处理为

$$\dot{k} + \dot{m} = \frac{\dot{K} + (\dot{M/P})}{L} - nk - nm \tag{2.58}$$

$$= s(f(k) + (\theta - \pi)m) - n(k + m) \tag{2.59}$$

其中 $k_0 = \frac{K_0}{L_0}, m_0 = \frac{M_0}{P_0 L_0}$，$P_0$ 是否给出呢？一个资本积累动态如何决定两种资产 (k, m) 的均衡？这是模型的第一步技术性处理，需要引入新的方程来处理两个变量的问题。

重新引入新的方程：根据 $m = \frac{M}{PL}$，得到

$$\dot{m}/m = \dot{M}/M - \dot{P}/P - \dot{L}/L \tag{2.60}$$

$$\dot{m} = (\theta - \pi - n)m \tag{2.61}$$

因此上述系统转化为：

$$\dot{k} + \dot{m} = s(f(k) + (\theta - \pi)m) - n(k + m) \tag{2.62}$$

$$\dot{m} = (\theta - \pi - n)m \tag{2.63}$$

$$K_0, L_0, M_0 \tag{2.64}$$

利用二维动力系统分析均衡点的稳定性。均衡状态表示为：

$$\dot{k} + \dot{m} = s(f(k) + (\theta - \pi)m) - n(k + m) = 0 \tag{2.65}$$

$$\dot{m} = (\theta - \pi - n)m = 0 \tag{2.66}$$

此时给定任意的参数，必然有 $m = 0$，经济退化到实体的 $Solow$ 模型；倘若 $\theta - \pi - n = 0$，则 $\dot{m}$ 恒等于 0，M_t 不存在动态，这就导致要么没有货币，要么货币等于常数而没有动态，本质上依旧是实体经济而非货币经济。

从稳定性的角度看，利用二维动力系统的线性化展开可知，该系统特征根一正一负，而如果给出 k_0, m_0，两个初始条件决定一个负根[31]，依然存在问题。因此我们只需要给出 k_0, m_0 其中的一个，已知 K_0, L_0, M_0，则 k_0 给出，要使 m_0 不给出必然有 P_0 无法给出，也即 π 无法给出，这就要求我们将 π 内生化。这是模型中的第二处技术性处理，从稳定性角度给出了 π 内生化的理由，同时采用了 ad-hoc 的形式给出了 π 的内生化决定（理性选择），因而该动力系统的均衡点是鞍点稳定的。

为解决上述问题，*Tobin* 先念的（*ad-hoc*）引入资产持有份额满足 $\frac{m}{k} = \phi(r, \pi), \phi_r < 0, \phi_\pi < 0$，两种资产组合是相应价格的函数。经济含义表示为家庭在实物资产 k 和货币资产 m 存在权衡取舍，货币资产与实物资产的比值取决于两种资产的价格，如果 r 越高表明持有货币的机会成本越高，货币资产与实物资产的比值越低；如果 π 越高表明持有货币的成本越高而持有实物的成本越低（高通胀下货币贬值进而刺激兑换实物的需求），货币资产与实物资产的比值越低。

2.6.2 *Tobin* 模型数学形式

给定引入货币的模型设定：

$$\begin{cases} Y = F(K, L) & \\ s = \text{const.} & \frac{\dot{P}}{P} = \pi(m, k), \quad \pi_m < 0, \pi_k > 0 \\ L = \varphi p, \varphi = \text{const.} & \frac{\dot{M}}{M} = \theta \\ \dot{p} = np, p(0) & \end{cases}$$

Government:

$$\text{Revenue} \begin{cases} \text{Tax: } T(T = 0) \\ \text{Seigniorage: } \dot{M} \end{cases} = \text{Expenditure} \begin{cases} \text{Fiscal expenditure: } G \\ \text{Transfer payment: } X \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{M}}{P} = G + X \Rightarrow \frac{\dot{M}}{M}\frac{M}{PL} = \frac{G}{L} + \frac{X}{L} \Rightarrow \theta m = g + x$$

$$\Rightarrow m = \frac{M}{PL} \Rightarrow \dot{m} = \frac{\dot{M}}{PL} - \frac{M}{(PL)^2}\left(\dot{A}L + A\dot{L}\right) \Rightarrow \dot{m} = m(\theta - \pi - n)$$

Consumer:

$$A = K + \frac{M}{P} \Rightarrow \begin{cases} \text{Tobin: } \dot{A} = \dot{K} + (\dot{\frac{M}{P}}) = s(rK + wL - \pi\frac{M}{P} + X) \\ \text{Sidrauski: } \dot{A} = \dot{K} + (\dot{\frac{M}{P}}) = s(rK + wL + X) \end{cases}$$

Firm:

$$\max_{K,L} F(K, L) - rK - wL \Rightarrow \begin{cases} r = f'(k) \\ w = f(k) - f'(k)k \end{cases}$$

Equilibrium:

$$\begin{aligned} &\dot{k} + \dot{m} = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{K}{L}\frac{\dot{L}}{L} + \frac{(\dot{M/P})}{L} - \frac{M/P}{L}\frac{\dot{L}}{L} \\ \Rightarrow &\dot{k} + \dot{m} = s(f(x) + x - \pi m) - kn - mn \\ \Rightarrow &\dot{k} = sf(k) - nk + (1 - s)m(\pi - \theta) - sg \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{k} + \dot{m} = s(f(x) - \pi m + x) - kn - mn \\ \dot{m} = m(\theta - \pi - n) \\ \theta m = g + x \\ \frac{m}{k} = \phi(r, \pi), \phi_r < 0, \phi_\pi < 0 \ (\textit{Endogenous Cash Asset Ratio}) \Rightarrow \pi_m < 0, \pi_k > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{k} = sf(k) - nk + m(1 - s)(\pi(m, k) - \theta) - sg \\ \dot{m} = m(\theta - n - \pi(m, k)) \end{cases}$$

[31] 高维系统中负根数量必须要和初始条件一致才能保证鞍点稳定。

该系统决定均衡的 (k^*, m^*, π^*)[32]。下面利用二维动力系统的方法考察均衡解的存在性、唯一性和稳定性，可以证明该均衡解是唯一且鞍点稳定的。

$$\begin{cases} \dot{k} = sf(k) - nk + m(1-s)(\pi(m,k) - \theta) - sg \\ \dot{m} = m(\theta - n - \pi(m,k)) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{k} = (sf' - n + m(1-s)\pi_k)(k - k^*) + (1-s)(\pi - \theta)(m - \dot{m}) \\ \dot{m} = -m\pi_k(k - \dot{k}) + (\theta - n - \pi - m\pi_m)(m - \dot{m}) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{k} \\ \dot{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sf' - n + m(1-s)\pi_k & (1-s)(\pi - \theta) \\ -m\pi_k & -m\pi_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k - k^* \\ m - m^* \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = sf' - n + m(1-s)\pi_k - m\pi_m > 0 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -m\pi_m(sf' - n + m(1-s)\pi_k) + m\pi_k(1-s)(\pi - \theta) < 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \ \textit{one positive and one negative}$$
$$\Rightarrow \textit{Saddle point stability}$$

2.6.3 *Tobin* 模型均衡解的存在性、唯一性和稳定性

给定 $\frac{m}{k} = \phi(f'(k_t), \pi_t), \phi_r < 0, \phi_\pi < 0$，存在反函数 $\pi_t = \pi(k, m)$, 其中 $\pi_k = \frac{d\pi}{dk} > 0, \pi_m = \frac{d\pi}{dm} < 0$[33]。给定均衡状态得到：

$$s(f(k^*) + (\theta - \pi(k^*, m^*))m^*) - n(k^* + m^*) = 0 \tag{2.67}$$
$$m^*(\theta - \pi(k^*, m^*) - n) = 0 \tag{2.68}$$

当 $m^* = 0$ 不存在货币时，*Tobin* 模型退化为一般的 *Solow* 模型，存在唯一的稳定均衡点 k^*；我们重点讨论 $m^* \neq 0$ 即存在货币情况下的均衡状态，进一步简化得到

$$sf(k^*) = nk^* + (1-s)nm^* \tag{2.69}$$
$$= kn^*(1 + (1-s)\phi(f'(k^*), \pi^*)) \tag{2.70}$$
$$= kn^*(1 + (1-s)\phi(f'(k^*), \theta - n)) \tag{2.71}$$

定义函数 $h(k) = \frac{sf(k)}{k} - (1-s)n\phi(f'(k), \theta - n)$，给定生产函数的凹性，可知 $h'(k) = s\frac{f'(k)k - f(k)}{k^2} - (1-s)n\phi_r f''(k) < 0$，函数 $h(k)$ 在 $(0, \infty)$ 上单调递减；考虑到 $\lim_{k\to 0} h(k) = \lim_{k\to 0} sf'(k) - (1-s)n\phi(f'(k), \theta - n) > 0, \lim_{k\to\infty} h(k) = \lim_{k\to\infty} sf'(k) - (1-s)n\phi(f'(k), \theta - n) < 0$[34]。根据单调性和零点定理可知，存在唯一的 k^*。给定 k^*，根据 $\pi(k_t, m_t) = \theta - n$ 可以唯一确定 m^*，因此存在唯一的均衡点 (k^*, m^*)。

下面讨论均衡解的稳定性，在稳定点附近线性化展开得到：

$$\dot{k} = sf(k_t) - nk_t + (s-1)(\theta - \pi_t)m_t \tag{2.72}$$
$$= [sf'(k^*) - n + (1-s)\pi_k m^*](k_t - k^*) + [(s-1)(n - \pi_m m^*)](m_t - m^*) \tag{2.73}$$
$$\dot{m} = -\pi_k m^*(k_t - k^*) - \pi_m m^*(m_t - m^*) \tag{2.74}$$
$$\begin{bmatrix} \dot{k}_t \\ \dot{m}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sf'(k^*) - n + (1-s)\pi_k m^* & (s-1)(n - \pi_m m^*) \\ -\pi_k m^* & -\pi_m m^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_t - k^* \\ m_t - m^* \end{bmatrix} \tag{2.75}$$

[32]理解逻辑框架：从 1 个方程到 2 个方程再到 3 个方程的逻辑在于不断的遇到困境和不停的解决新的问题，引入新的设定。第一，给定储蓄和资产的动态积累，我们无法同时确定 (k_t, m_t) 的均衡决定，因此需要引入 m_t 的动态积累方程，该方程由人均资本需求量定义；第二，给定系统的稳定性条件，我们需要先念的给定 π 的内生化设定，从而保证系统的稳定性。

[33]取全微分得到 $\frac{1}{k}dm - \frac{m}{k^2}dk = \phi_r f''(k)dk + \phi_\pi d\pi$，$\frac{d\pi}{dk} = -(\frac{m}{k^2} + \phi_r f''(k))/\phi_\pi > 0, \frac{d\pi}{dm} = \frac{1}{k\phi_\pi} < 0$

[34]当 $f'(k_t) \to 0$, 持有货币的机会成本无限低，此时家庭会更多的倾向于持有货币资产；当 $f'(k_t) \to \infty$, 持有货币的机会成本无限高，此时家庭会更多的倾向于持有实物资产。

考虑系数矩阵的特征根 λ_1,λ_2，有

$$\lambda_1\lambda_2 = [sf'(k^*) - n + (1-s)\pi_k m^*](-\pi_m m^*) + (s-1)(n - \pi_m m^*)\pi_k m^* \tag{2.76}$$
$$= -[sf'(k^*) - n]\pi_m m^* - (1-s)\pi_k m^* n < 0 \tag{2.77}$$

此时特征根必定为一正一负，该二维动力系统的均衡点是鞍点稳定的。注意，尽管鞍点稳定通常与最优选择相对应，但 *Tobin* 模型中并无最优选择，所以鞍点路径也并不代表最优路径。

进一步的我们可以考察货币政策对于稳态资本存量的影响，给定均衡状态，左右侧取全微分，同时令 $dn = ds = 0$，得到

$$\frac{dk^*}{d\theta} = \frac{n(1-s)\phi_\pi}{s\frac{f'(k^*)k^* - f(k^*)}{(k^*)^2} - n(1-s)\phi_r f''(k^*)} > 0 \tag{2.78}$$

$$\frac{dm^*}{d\theta} < 0 \tag{2.79}$$

可知货币供应增加会导致稳态的人均资本存量增加，而稳态的人均货币需求量降低，此时货币是非超中性的（货币增长率 θ 影响实际变量）。

2.6.4 *Tobin* 模型中货币政策的作用

给定 *Solow* 模型：

$$sf(k) = nk \tag{2.80}$$

给定 *Tobin* 模型：

$$sf(k) = nk(1 + (1-s)\frac{m}{k}) \tag{2.81}$$

引入货币资产后，存在 $k^*_{Tobin} < k^*_{Solow}$（图形分析），这是因为企业不仅要持有资本，还需要持有政府发行的货币（资产的多种持有），因而持有的稳态资本存量低于 *Solow* 模型。进一步的，考察货币政策对经济的影响：

- 稳态时存在 $\pi^* = \theta - n$，通货膨胀和货币供应一一对应 $\frac{d\pi^*}{d\theta} = 1$，即通货膨胀始终是一种货币现象。
- 货币供应 θ 对于均衡经济变量的影响，给定均衡状态

$$sf(k) = nk(1 + (1-s)\frac{m}{k}) = nk(1 + (1-s)\phi(r, \theta - n)) \to k^* \tag{2.82}$$

其中 $\frac{dk^*}{d\theta} > 0$，表明货币供应增加导致人均资本存量、人均产出增加，这与 *IS-LM* 模型是一致的。***Tobin* 模型中货币是非中性的**，货币供应的增加会导致人均稳态资本存量和人均产出增加。经济解释在于：当货币供应增加导致经济通胀提高，持有货币的机会成本提高，家庭侧会降低对于货币资本的持有而提高实物资本，进而促进了企业生产，导致稳态的人均资本存量和稳态人均产出提高。

2.6.5 *Sidrauski Framework*

Sidrauski 将货币视为名义变量的处理：消费者的名义资产表示为 $A = K + M = RK + 0\cdot M + WL$（均为名义变量）

$$\dot{A} = P_t\dot{K}_t + M_t = s(R_tK_t + 0\cdot M_t + W_tL_t + P_tX_t) \tag{2.83}$$

家庭部门面临如下资产积累方程：

$$\dot{K}_t + \frac{\dot{M}_t}{P_t} = s(r_tK_t + w_tL_t + X_t) \tag{2.84}$$

定义人均资本存量 $k_t = K_t/L_t$ 和人均货币持有量 $m_t = M_t/P_tL_t$，将上述总量资产积累方程转化为人均形式的资产积累方程：

$$\dot{k}_t = (\frac{\dot{K}_t}{L_t}) = \frac{\dot{K}_t}{L_t} - nk_t \tag{2.85}$$

$$\dot{m}_t = (\frac{\dot{M}_t}{P_tL_t}) = \frac{\dot{M}_t}{P_tL_t} - nm_t - \pi m_t \tag{2.86}$$

$$\dot{k}_t + \dot{m}_t = \frac{\dot{K}_t + \dot{M}_t/P_t}{L_t} - n(k_t + m_t) - \pi m_t \tag{2.87}$$

$$= s(r_tk_t + w_t + x_t) - n(k_t + m_t) - \pi m_t \tag{2.88}$$

其中 $\frac{\dot{P}_t}{P_t} = \pi, \frac{\dot{M}_t}{M_t} = \theta$。

厂商面临的生产决策表示为：

$$max\ F(K_t, L_t) - r_tK_t - w_tL_t \tag{2.89}$$

$$r_t = \frac{\partial F}{\partial K_t} = f'(k_t) \tag{2.90}$$

$$w_t = \frac{\partial F}{\partial L_t} = f(k_t) - k_tf'(k_t) \tag{2.91}$$

政府部门的预算平衡方程表示为：

$$X_t = \frac{\dot{M}_t}{P_t} \tag{2.92}$$

$$\to x_t = \frac{\dot{M}_t}{P_tL_t} = \frac{\dot{M}_t}{M_t}\frac{M_t}{P_tL_t} = \theta m_t \tag{2.93}$$

均衡时得到如下人均资本积累方程：

$$\dot{k}_t + \dot{m}_t = s(r_tk_t + w_t + x_t) - n(k_t + m_t) - \pi m_t \tag{2.94}$$

$$= s(f(k_t) + \theta m_t) - n(k_t + m_t) - \pi m_t \tag{2.95}$$

单个方程无法同时决定 (k_t, m_t)，因此我们引入 m_t 的积累动态，根据定义 $m_t = M_t/P_tL_t$，相应的有

$$\frac{\dot{m}_t}{m_t} = \frac{\dot{M}_t}{M_t} - \frac{\dot{P}_t}{P_t} - \frac{\dot{L}_t}{L_t} \tag{2.96}$$

$$\to \dot{m}_t = m_t(\theta - \pi - n) \tag{2.97}$$

考虑到如果给定 P_0 则相应的给出 m_0，该系统在存在一个负特征根的情况下对应两个初始条件 k_0, m_0，并不稳定，因此考虑将 π 内生化，给定一般均衡下 $r_t = f'(k_t)$，引入家庭部门在实际资本和货币资本之间的权衡关系：

$$\frac{m_t}{k_t} = \phi(r_t, \pi_t) = \phi(f'(k_t), \pi_t) \tag{2.98}$$

其中 $\phi_r < 0, \phi_\pi < 0$。

完整的 *Sidrauski* 模型给定如下：

$$\dot{k}_t + \dot{m}_t = s(f(k_t) + \theta m_t) - n(k_t + m_t) - \pi m_t \tag{2.99}$$

$$\dot{m}_t = m_t(\theta - \pi - n) \tag{2.100}$$

$$\frac{m_t}{k_t} = \phi(r_t, \pi_t) = \phi(f'(k_t), \pi_t) \tag{2.101}$$

$$k_0 = K_0/L_0 \tag{2.102}$$

上述动力系统同时决定 (k_t, m_t, π_t)。

2.6.6 *Sidrauski* 模型均衡点的存在性、唯一性与稳定性

给定均衡状态：

$$\dot{k}_t + \dot{m}_t = s(f(k^*) + \theta m^*) - n(k^* + m^*) - \pi^* m^* = 0 \tag{2.103}$$
$$\dot{m}_t = m^*(\theta - \pi^* - n) = 0 \tag{2.104}$$

其中 $\pi_t = \pi(k_t, m_t)$,$\pi_k = \frac{d\pi}{dk} > 0, \pi_m = \frac{d\pi}{dm} < 0$。简化均衡状态得到：

$$sf(k^*) = nk^* + (1-s)\theta m^* \tag{2.105}$$
$$= k^*(n + (1-s)\theta\phi(f'(k^*), \theta - n)) \tag{2.106}$$

定义函数 $h(k) = \frac{sf(k)}{k} - (1-s)\theta\phi(f'(k), \theta - n)$，给定生产函数的凹性，可知 $h'(k) = s\frac{f'(k)k - f(k)}{k^2} - (1-s)\theta\phi_r f''(k) < 0$，函数 $h(k)$ 在 $(0, \infty)$ 上单调递减；考虑到 $\lim_{k\to 0} h(k) = \lim_{k\to 0} sf'(k) - (1-s)\theta\phi(f'(k), \theta - n) > 0, \lim_{k\to\infty} h(k) = \lim_{k\to\infty} sf'(k) - (1-s)\theta\phi(f'(k), \theta - n) < 0$。根据单调性和零点定理可知，存在唯一的 k^*。给定 k^*，根据 $\pi(k_t, m_t) = \theta - n$ 可以唯一确定 m^*，因此存在唯一的均衡点 (k^*, m^*)。

考察均衡点的稳定性，在均衡点附近线性化展开得到：

$$\dot{k}_t = sf(k_t) - nk_t - (1-s)\theta m_t \tag{2.107}$$
$$= [sf'(k^*) - n](k_t - k^*) - (1-s)\theta(m_t - m^*) \tag{2.108}$$
$$\dot{m}_t = -\pi_k m^*(k_t - k^*) - \pi_m m^*(m_t - m^*) \tag{2.109}$$
$$\begin{bmatrix} \dot{k}_t \\ \dot{m}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sf'(k^*) - n & -(1-s)\theta \\ -\pi_k m^* & -\pi_m m^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_t - k^* \\ m_t - m^* \end{bmatrix} \tag{2.110}$$

考虑系数矩阵的特征根 λ_1, λ_2，有

$$\lambda_1\lambda_2 = -\pi_m m^*(sf'(k^*) - n) - (1-s)\theta\pi_k m^* < 0 \tag{2.111}$$

此时特征根必定为一正一负，该动力系统的均衡点是鞍点稳定的。

2.6.7 *Sidrauski* 模型中货币政策的作用

考察货币政策 θ 对于经济的影响。货币存量不影响实体经济变量的特性称为货币中性。货币增长率不影响实体经济变量的特性称为货币超中性 [*super-neutrality of money*]。首先给出判定货币是否中性的条件：一是根据通胀和货币增长率关系，即 $\frac{\partial\pi}{\partial\theta} = 1$，如果成立表明货币供应的增长导致价格同比例增长，货币是中性的；二是根据实际变量与货币供应的关系确定，即 k^*, y^* 是否独立于货币 m^*[35]。对于货币超中性的判定，则可以使用 $\frac{\partial k^*}{\partial\theta}$ 是否等于 0，如果等于零则表示货币具有超中性。可以证明：*Sidrauski* 模型中货币是中性的，但不是超中性的。

Proof: 首先给定 $\theta = \pi^* + n$，因此有

$$\frac{d\pi^*}{d\theta} = 1 \tag{2.112}$$

货币供应的增长导致价格同比例变化，即货币是中性的。进一步的，我们得到货币政策对于 k^*, m^* 的影响

$$\frac{dk^*}{d\theta} = \frac{(1-s)(m^* + k^*\phi_\pi\theta)}{sf'(k^*) - n - (1-s)(m^*/k^* + k^*\phi_r f''(k^*))} \tag{2.113}$$
$$\frac{dm^*}{d\theta} = \frac{(1-s)(m^* + k^*\phi_\pi\theta)(m^*/k^* + k^*\phi_r f''(k^*))}{sf'(k^*) - n - (1-s)(m^*/k^* + k^*\phi_r f''(k^*))} \tag{2.114}$$

[35] 简单说明，货币中性是判定货币 M 对于实际变量是否有影响，货币超中性是判别货币增长率 θ 对于实际变量是否有影响。

注意到 $h'(k^*) < 0$, 所以货币供应率 θ 对于经济的影响取决于 $m^* + k^*\phi_\pi\theta$ 的符号。如果 $m^* + k^*\phi_\pi\theta > 0$, 相应的 $\frac{dk^*}{d\theta} < 0, \frac{dm^*}{d\theta} < 0$; 换言之，此时货币供应速率会对经济中的实际变量产生影响，即货币并非超中性的。当然如果 $m^* + k^*\phi_\pi\theta = 0$，货币是超中性的，因而具体取决于参数和函数形式。

3 *Ramsey Model*

给定 *Solow* 模型的基本假定，储蓄率行为外生于个体选择，系统中不存在个体的理性选择因而均衡点是（局部）完全稳态。*Ramsey-Cass-Kooprman Model(1928,EJ;1965,RES)* 将储蓄行为（s）内生为个体跨期的最优消费选择，将居民或家庭部门的理性选择纳入增长框架。在标准的一般均衡中推导个体或家庭的偏好，明确偏好排序将更加有助于理解储蓄的决定机制及其最优均衡，并在此基础上讨论竞争性均衡能否得到改善的福利分析。

3.1 连续 *Ramsey Model*：分散经济

3.1.1 消费者问题

给定消费者的效用最大化行为：考察消费者的资产变化，一方面是资产回报 rA_t，另一方面是劳动收入 w_tL_t，根据收入支出关系得到（暂时不考虑政府的税收）

$$r_tA_t + w_tL_t = C_t + S_t \tag{3.1}$$

对于消费者而言应该如何决定最优的储蓄率？*Ramsey* 指出通过消费的跨期选择达到效用最大化从而最优化储蓄行为，假设消费者生存期为 $(0,T)$(代表性消费者可以拓展为 $(0,\infty)$，即经济体中的代表性消费者可以永续存在)，消费者的效用函数表示为 $max_{s_t}\ u(c_1,c_2,\ldots,c_T), s_t \in [0,1]$。在该模型中需要注意：$u(c_1,c_2,\ldots,c_T)$ 是定义在 $(0,T)$ 的消费流 $\{c_t\}_0^T$，问题在于消费者跨期的效用函数如何进行处理？

Sameulson(1937,RES) 给出了跨期效用和的技术性处理：（1）假定消费者的跨期消费函数是时间可分的，即单一时期的效用只取决于该时期的消费；（2）假设效用函数（偏好）是时间不变的，即不同期的效用函数保持不变 $u(\cdot)$；（3）无穷期效用和面临无穷级数收敛的问题，否则出现消费膨胀，假定不同时期的效用使用常数贴现率 ρ（贴现因子 $\frac{1}{1+\rho}$）来区分。据此可以给出消费者跨期消费选择的效用和：

$$u(c_1,c_2,\ldots,c_T) = \sum_0^T \frac{1}{(1+\rho)^t}u(c_t) = \int_0^T u(c_t)e^{-\rho t}dt \tag{3.2}$$

代表性消费者的最优化问题表示为：

$$\begin{aligned} max_{s_t,C_t,A_t} \quad & \int_0^T u(C_t)e^{-\rho t}dt \\ & \dot{A}_t = s_t(r_tA_t + w_tL_t) \\ & C_t = (1-s_t)(r_tA_t + w_tL_t), 0 \le s_t \le 1 \end{aligned}$$

其中约束可以进一步处理为

$$\dot{A}_t = (r_tA_t + w_tL_t) - C_t$$

将约束中的 s_t 消除从而规避 s_t 的不等式约束带来的求解问题。因此消费者的最优问题可以标准化为：

$$max_{C_t,A_t} \quad \int_0^T u(C_t)e^{-\rho t}dt \tag{3.3}$$

$$\dot{A}_t = r_tA_t + w_tL_t - C_t, A_0 \tag{3.4}$$

进一步我们处理为人均化形式：首先对于资产的积累方程进行简化

$$\dot{a}_t = (\frac{\dot{A}_t}{L_t}) = (r_t - n)a_t + w_t - c_t \tag{3.5}$$

对于目标函数进行处理以方便问题分析，假定效用函数是关于 L_t 的 x 阶齐次函数。一般的我们进一步假定为关于 L_t 为一次其次，并且人口增长为 $L_t = L_0 e^{nt}$，可以简化为

$$\int_0^T u(c_t L_t) e^{-\rho t} dt = \int_0^T u(c_t) L_t e^{-\rho t} dt = \int_0^T u(c_t)(L_0^x e^{nt}) e^{-\rho t} dt \tag{3.6}$$

$$= L_0^x \int_0^T u(c_t) e^{-(\rho - n)t} dt = \int_0^T L_0^x u(_t) e^{-\beta t} dt \tag{3.7}$$

其中 $\beta = \rho - n$ 定义为经过人口增长率调整后的贴现因子。

人均化的消费者行为给定为

$$max_{c_t, a_t} \int_0^T u(c_t) e^{-\beta t} dt \tag{3.8}$$

$$\dot{a}_t = (r_t - n) a_t + w_t - c_t, a_0 \tag{3.9}$$

3.1.2 厂商问题与市场均衡

给定生产者的利润最大化行为：厂商最优化生产决策

$$max_{K_t, L_t}\ F(K_t, L_t) - r_t K_t - w_t L_t \tag{3.10}$$

$$FOC.\ r_t = f'(k_t), w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t) \tag{3.11}$$

市场均衡条件：给定资本市场均衡

$$K_t = A_t \tag{3.12}$$

根据 *walras* 规则，资本市场均衡情况下其他市场自发均衡，此时消费者决定消费和储蓄行为路径，厂商决定资本和劳动的投入路径以及产品生产路径，最终实现经济一般均衡。

3.1.3 *Ramsey Model* 数学形式

Consumer:

$$\max_{c,a} \int_0^\infty u(c) e^{-\beta t} dt$$
$$\text{s.t. } \dot{a} = (r - n)a + w - c, a(0)$$

Firm:

$$\max_{K,L} F(K, L) - rK - wL \Rightarrow \begin{cases} r = f'(k) \\ w = f(k) - f'(k)k \end{cases}$$

Equilibrium: $a = k$。定义 *Hamilton* 函数：

$$H = u(c) e^{-\beta t} + \lambda((r - n)a + w - c)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial c} = u'(c) e^{-\beta t} - \lambda \Rightarrow \begin{cases} \lambda = u' e^{-\beta t} \\ \dot{\lambda} = u'' e^{-\beta t} \dot{c} - \beta u' e^{-\beta t} \end{cases} \\ \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial a} = -\lambda(r - n) = -u' e^{-\beta t}(r - n) \Rightarrow \dot{c} = -\frac{u'(c)}{u''(c)}(r - n - \beta) \\ \dot{a} = (r - n)a + w - c, a(0) = a_0 \\ \text{TVC: } \lim_{T\to\infty} \lambda(T) a(T) = u'(c) e^{-\beta T} a(T) = 0, \lim_{T\to\infty} a(T) = 0, \lim_{T\to\infty} \lambda(T) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{c} = -\frac{u'(c)}{u''(c)}(f'(k) - n - \beta) \\ \dot{k} = \dot{a} = (f'(k) - n)k + f(k) - kf'(k) - c = f(k) - nk - c \\ \lim_{T\to\infty} u'(c) e^{-\beta T} k(T) = 0 \end{cases}$$

3.2 连续 *Ramsey Model*：中央计划者经济

3.2.1 中央计划者经济设定

给定中央计划者（*God*）在整个社会资源约束的情况下最优化社会资源配置，使得社会福利极大化。首先给定社会资源约束，不同于消费者的预算约束，社会计划者面临的是整体性的资源约束，即 GDP 恒等式 $Y = F(K, L) = C + I + G$，不考虑政府行为

$$\dot{K}_t = I_t = F(K_t, L_t) - C_t \tag{3.13}$$

对于代表性消费者而言，社会计划者对应的福利最大化就是代表性消费者的效用最大化，因此可以表述为

$$max_{C_t,K_t} \int_0^T u(C_t)e^{-\rho t}dt \tag{3.14}$$
$$\dot{K}_t = I_t = F(K_t, L_t) - C_t \tag{3.15}$$

均衡决定资源最优配置路径 $\{C_t\}_0^T, \{K_t\}_0^T$。进一步的，人均化形式处理为

$$max_{k_t,c_t} \int_0^T u(c_t)e^{-\beta t}dt \tag{3.16}$$
$$s.t.\ \dot{k}_t = f(k_t) - c_t - nk_t, k(t_0) = k_0 \tag{3.17}$$

其中 $\beta = \rho - n$ 定义为经过人口增长率调整的贴现因子。

3.2.2 *Ramsey Model* 数学形式

给定中央计划者问题的最优化问题：

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} - kn = f - c - kn$$
$$\max_{c,a} \int_0^\infty u(c)e^{-\beta t}dt$$
$$\text{s.t. } \dot{k} = f(k) - nk - c, k(0)$$

定义 *Hamilton* 函数：

$$H = u(c)e^{-\beta t} + \lambda(f(k) - nk - c)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial c} = u'(c)e^{-\beta t} - \lambda \Rightarrow \begin{cases} \lambda = u'e^{-\beta t} \\ \dot{\lambda} = u''e^{-\beta t}\dot{c} - \beta u'e^{-\beta t} \end{cases} \\ \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial a} = -\lambda(r-n) = -u'e^{-\beta t}(r-n) \Rightarrow \dot{c} = -\frac{u'(c)}{u''(c)}(r - n - \beta) \\ \dot{k} = f(k) - nk - c, k(0) \\ \text{TVC: } \lim_{T\to\infty} \lambda(T)k(T) = u'(c)e^{-\beta T}k(T) = 0, \lim_{T\to\infty} k(T) = 0, \lim_{T\to\infty} \lambda(T) = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{c} = -\frac{u'(c)}{u''(c)}(f'(k) - n - \beta) \\ \dot{k} = f(k) - nk - c \\ \lim_{T\to\infty} u'(c)e^{-\beta T}k(T) = 0 \end{cases}$$

3.2.3 分散经济和集中经济比较

分散经济中消费者和厂商决策中都是部分信息的，消费者和厂商只知道自身的信息而不知道市场中的利率水平和工资水平，只有在一般均衡中才知道价格的完全信息。中央计划者经济中则知晓经济中的所有信息，可以在完全信息中最优化决策，因此集中经济是社会最优的资源配置（福利最大化）。中央计

划者经济等价于分散经济中厂商和消费者明确一般均衡的完全信息时的最优决策。分散经济可以达到集中经济均衡，意味着部分信息的经济可以达到完全信息的经济均衡，这必然要求市场是完备的，否则就不会达到集中经济的完全信息均衡。

一般而言，中央计划者经济优于分散经济。当时当分散经济中存在外部性时，分散经济均衡要优于集中经济均衡。*Lucas* 指出人力资本的正外部性会导致分散经济优于集中经济，这是因为人力资本外部性在集中经济中消失而在分散经济中则有明显的正影响，导致分散经济优于集中经济均衡。现实中，分散经济难以达到集中经济均衡 *First Order*，因而是 *Second Order*。

3.3 连续 *Ramsey Model* 的经济分析

3.3.1 分散经济消费者均衡条件的经济含义

给定分散经济中消费者的最优化问题，定义 *Hamilton* 函数

$$\mathcal{H} = u(c_t)e^{-\beta t} + \lambda_t((r-n)a_t + w_t - c_t) \tag{3.18}$$

其中，λ_t 是 *Hamilton* 乘子，表示财富 a_t 的边际值（影子价格）。极大值原理表明最优解满足如下条件：

$$\lambda(t) = u'(c_t)e^{-\beta t} \tag{3.19}$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\lambda(t)(r_t - n) \tag{3.20}$$

$$\dot{a}(t) = (r_t - n)a_t + w_t - c_t \tag{3.21}$$

$$\lim_{t\to\infty} \lambda^*(t) \geq 0,\ \lim_{t\to\infty} a^*(t) \geq 0,\ \lim_{t\to\infty} \lambda^*(t)a^*(t) = 0 \tag{3.22}$$

其中，效用函数的凹性保证了二阶条件，生产函数的凹性和效用函数的严格单增保证了 *Hamilton* 极大值原理解的充分性条件。逐个考察极大值原理的各个方程的经济含义。

$$\lambda(t) = u'(c_t)e^{-\beta t} \tag{3.23}$$

λ_t 表示财富的边际效用，$u'(c_t)e^{-\beta t}$ 表示消费者消费的边际效用，最优化情况下必然满足财富的边际效用等价于消费的边际效用。同时，该式还可以进一步视作无套利条件，即增加 1 单位消费的效用和增加 1 单位储蓄（积累）的效用应该等价，在同一期消费和储蓄完全是一回事（同期无套利），否则就会在两种选择中进行套利选择。

进一步简化 *Euler* 方程得到消费的动态变化：

$$\dot{c}_t = -\frac{u'(c_t)}{u''(c_t)}(r_t - n - \beta) \tag{3.24}$$

上述方程表示跨期无套利条件（无套利意味着理性选择）。在任意 t 时刻，消费者可以减少 dc_t 的消费，相应减少的效用为 $u'(c_t)dc_t$，减少消费的钱用来储蓄，获得收益率 r（假定人口增长率 $n=0$）；在 $t+dt$ 时刻，消费者储蓄获得收益 $(1+rdt)c_t = e^{rdt}dc_t$，产生的效用表示为 $u'(c_{t+dt})e^{rdt}dc_t$。跨期的无套利条件下当期消费减少的效用等价于未来储蓄带来的效用（使用 β 进行贴现才能进行比较），表示为

$$u'(c_t)dc_t = u'(c_{t+dt})e^{rdt}dc_t \cdot e^{-\beta t} \tag{3.25}$$

将 $u'(c_{t+dt})$ 在 c_t 处泰勒展开，$e^{r-\beta t} = 1 + r - \beta$，简化得到 *Euler* 方程。

上述两个方程都可以表示为无套利条件，这表明无套利的结果就是最优选择（理性选择）的结果。在 MF 中纳入外汇的无套利条件也可以导出理性条件下的鞍点稳定。

3.3.2 NPG 与 TVC 的经济含义

给定 NPG 条件：允许私人进行借贷，但是私人借贷速度不能无穷大，否则会导致债务膨胀：

$$\lim_{T\to\infty} a(T)e^{-\int_0^T (r(v)-n)dv} \geq 0 \tag{3.26}$$

给定资产的增长速度 $\frac{\dot{a}_t}{a_t}=x$，相应的 $a_t=a_0e^{xt}$，NPG 转化为（假定利率为常数）

$$\lim_{T\to\infty}a(0)e^{x-(r-n)}T\geq 0 \tag{3.27}$$

上述方程表明：要么消费者不借贷 $a(0)$，完全不进行任何借贷行为；要么进行借贷，但是 $x<r-n$ 要求借贷速度低于实际利率水平，从而排除了无限借贷的可能性。

一般情况下 NPG 等号成立，这是因为 NPG 和 TVC 在某些情况下具有等价性。下面具体考察：给定 NPG 条件，当 $a(T)\geq 0$，TVC 成立，因此此时 NPG 意味着 TVC

$$\lim_{T\to\infty}a(T)e^{-\int_0^T(r(v)-n)dv}\geq 0, a(T)\geq 0\to\lim_{T\to\infty}a(T)u'(c_T)e^{-\beta T}=0 \tag{3.28}$$

如果 $a(T)<0$，相应的 NPG 必然取得等号形式

$$\lim_{T\to\infty}a(T)e^{-\int_0^T(r(v)-n)dv}=0 \tag{3.29}$$

因此，如果 $a(T)\geq 0$（允许借贷），NPG 等价于 TVC 形式；如果 $a(T)<0$（不允许借贷），NPG 必然取得等号，因此 NPG 实际上是以等号形式出现。

下面考察TVC 和 NPG 的等价性：如果效用函数是 CRRA 形式

$$u(c)=\frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} \tag{3.30}$$

给定 TVC 可以导出 NPG 条件，这也意味着 CRRA 效用函数形式时 NPG 以等号形式成立，TVC 和 NPG 是一回事

$$\lim_{T\to\infty}a(T)u'(c_T)e^{-\beta T}=0\to\lim_{T\to\infty}a(T)e^{-\int_0^T(r(v)-n)dv}=0 \tag{3.31}$$

3.3.3 *CRRA* 效用函数的经济分析

给定效用函数形式为 *CRRA*

$$u(c)=\frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} \tag{3.32}$$

其中 σ 一方面表示相对风险规避系数，另一方面反应消费者跨期消费的替代弹性 (替代弹性表示为 $\frac{1}{\sigma}$)。TVC 等价于

$$\lim_{T\to\infty}a(T)e^{-(r-n)T}=0 \tag{3.33}$$

其中 $r>n$，反常积分收敛。利用极大值原理可以导出

$$\dot{a}(t)=(r-n)a(t)+(w-c) \tag{3.34}$$

$$(a(t)e^{-(r-n)t})^{\cdot}=(w-c)e^{-(r-n)t} \tag{3.35}$$

$$\to\int_0^\infty c_te^{-(r-n)t}dt=\int_0^\infty w_te^{-(r-n)t}dt-\lim_{t\to\infty}(a(t)e^{-(r-n)t})+a(0) \tag{3.36}$$

其中 NPG 表明 $\lim_{t\to\infty}a(t)e^{-(r-n)t}=0$，因此消费可以进一步表示为

$$\int_0^\infty c_te^{-(r-n)t}dt=\int_0^\infty w_te^{-(r-n)t}dt+a(0)=y(0) \tag{3.37}$$

左边等价于家庭在全时期内总的消费贴现到现在的消费和；左边等价于家庭在全时期总的劳动收入贴现到现在的劳动收入和，$a(0)$ 表示资本市场收入，两者之和等价于家庭总收入（劳动收入 + 资本市场收入）。$a(0)$ 实际上也等于家庭在全时期总的资本收入贴现到现在的资本收入和

$$\int_0^\infty a_te^{-(r-n)t}dt=a(0) \tag{3.38}$$

此时资本市场的回报等于 0，这意味着**完备经济中资本市场没有收益**，尽管短期内家庭可以进行借贷，但是完备市场的加总导致资本市场总体上没有收益。当然，现实经济并非完备市场，资本市场存不存在收益，到底存在多少收益是 90 年代研究的关键问题，没有定论。*Sameulson* 认为实际回报只能来自于实际产出而非资本市场。

消费者的最优消费路径给定为

$$c(t) = c(0)e^{(r-n-\beta)t/\sigma} \tag{3.39}$$

但是此时并不知道 $c(0)$ 取值，进一步求解

$$\int_0^\infty c(0)e^{(r-n-\beta)t/\sigma}e^{-(r-n)t}dt = y(0) \tag{3.40}$$

$$\rightarrow c(0) = \frac{y(0)}{\int_0^\infty e^{[(r-n-\beta)/\sigma-(r-n)]t}dt} \tag{3.41}$$

其中 $(r-n-\beta)/\sigma-(r-n)<0$，证明见后。反常积分收敛，可以得到

$$c(0) = [r-n-(r-n-\beta)/\sigma]y(0) = \mu y(0) \tag{3.42}$$

进一步的我们可以证明（积分上限给定为 T）

$$c(t) = [r-n-(r-n-\beta)/\sigma]y(t) = \mu y(t) \tag{3.43}$$

经济含义表示最优消费是总收入的常数比例，即边际消费倾向 $MPC=\mu$。

给定边际消费倾向，进一步的可以讨论参数 r, n, β, σ 对于最优消费的影响，而储蓄和消费是完全相关的，因此可以分析参数对于最优储蓄的影响。

1. $\frac{\partial \mu}{\partial r} = (1-\frac{1}{\sigma})$，利率对于边际消费倾向的影响取决于 *CRRA* 效用函数中的跨期消费替代弹性 $\frac{1}{\sigma}$ 与 1 的大小关系。利率变化对于边际消费倾向存在两方面影响：一方面跨期替代效应表明利率提高会增加储蓄的收益率，从而降低当前消费，增加未来消费；另一方面收入效应表明利率提高会增加收入水平进而提高当期消费，因此利率对于消费的最终影响取决于两种效应的大小；

2. $\frac{\partial \mu}{\partial n} = -(1+\frac{1}{\sigma})<0$，这表明人口增长率的提高会降低边际消费倾向进而降低消费水平；这是因为人口率的提高会降低均衡的私人财富积累进而降低消费水平；

3. $\frac{\partial \mu}{\partial \sigma} = \frac{r-n-\beta}{\sigma^2}>0$，其中 $\frac{r-n-\beta}{\sigma}>r-n>0$，相对风险规避系数提高导致消费者跨期消费替代弹性降低，进而降低了未来消费对于当期消费的替代，当期消费水平提高；

4. $\frac{\partial \mu}{\partial \beta} = \frac{1}{\sigma}>0$，这表明贴现因子 β 的提高会导致当期消费水平的增加，这是因为贴现因子提高对应于更低的未来消费效用贴现和，从而消费者会倾向于选择增加当期消费而减少未来消费。

给定上述约束条件，可知 CRRA 形式的效用函数在 *Ramsey Model* 中存在

$$\frac{c(t)}{y(t)} = \mu \tag{3.44}$$

Merton(1971,JET) 根据该形式给出了 *Ramsey Model* 中引入投资组合的选择性问题，并进一步分析了资产定价。

给定 *Ramsey Model* 中消费与收入的固定比例关系，在宏观金融和宏观经济学中存在如下两个 *puzzle* 难以使用 *Ramsey Model* 现有的框架解释：

风险溢价 *Puzzle*（*Risk Premium Puzzle*）（*Prescott and Mehra, 1985JME*）：*Merton* 给出了风险资产与无风险资产的投资组合选择问题，其中风险溢价定义为无风险资产和风险资产收益率的差 r_s-r_B，但是在于数据拟合的过程中发现实际的收益差要远高于理论预测的收益差。

消费平滑性 *Puzzle*：给定上述消费与收入的关系，理论上消费波动性和收入波动性一致（方差一致），但是现实数据拟合表明消费波动性要远小于收入波动性，消费更具有平滑性。

Ramsey Model 改进：*Ryder Heal(1972 RES)* 将效用函数中跨期消费替代弹性和风险参数分开，假定效用不是时间可分的，当期效用受到过去消费的影响，并引入习惯（habit）进行解释。

3.3.4 $(r-n-\beta)/\sigma-(r-n)<0$ 证明

Proof：给定如下家庭部门的决策问题：

$$max \int_0^\infty \frac{c(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}e^{-\beta t}dt \tag{3.45}$$

$$s.t.\ \dot{a}(t)=(r-n)a(t)+w(t)-c(t) \tag{3.46}$$

其中，$r>0, n>0$ 且满足 $r>n, \beta>0, \sigma>0, a(0)=a_0, \lim_{t\to\infty}a(t)=0$，证明

$$\frac{r-n-\beta}{\sigma}-(r-n)<0 \tag{3.47}$$

对于私人财富的积累动态有

$$(\dot{a}(t)-(r-n)a(t))=w(t)-c(t) \tag{3.48}$$

$$a(t)\dot{e^{-(r-n)t}}=[w(t)-c(t)]e^{-(r-n)t} \tag{3.49}$$

积分得到

$$\int_0^\infty c(t)e^{-(r-n)t}dt=\int_0^\infty w(t)e^{-(r-n)t}dt-[\lim_{t\to\infty}a(t)e^{-(r-n)t}-a_0] \tag{3.50}$$

给定 *NPG* 有

$$\lim_{t\to\infty}a(t)e^{-(r-n)t}=0 \tag{3.51}$$

考虑到 $r>n$，反常积分收敛；给定极大值原理的最优性条件可知，当效用函数为 *CRRA* 形式时，存在

$$c(t)=c(0)e^{\frac{r-n-\beta}{\sigma}t} \tag{3.52}$$

代入反常积分得到

$$\int_0^\infty c(t)e^{-(r-n)t}dt=\int_0^\infty c(0)e^{[\frac{r-n-\beta}{\sigma}-(r-n)]t}dt \tag{3.53}$$

反常积分收敛等价于

$$\frac{r-n-\beta}{\sigma}-(r-n)<0 \tag{3.54}$$

Q.E.D

3.3.5 显式解情形

注意到线性消费函数的导出来自于分散经济下的消费者决策，此时消费者对于要素价格 r, w 不具备完全信息，是价格接受者因而根据外生的要素价格做出决策。现在来考察均衡框架下的消费问题，考虑中央计划者的 *Ramsey Model* 或者一般均衡下的分散经济均衡：

$$\frac{\dot{c}}{c}=-\frac{u'(c)}{u''(c)c}[f'(k)-n-\beta] \tag{3.55}$$

$$\dot{k}=f(k)-nk-c \tag{3.56}$$

上述方程决定均衡路径 (c_t, k_t)，从而进一步决定 y_t, r_t, w_t[36]。

给定 *CRRA* 形式的效用函数 $u(c) = \frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}$，当生产函数为 $f(k) = Ak$（非新古典生产函数），线性系统简化为

$$\dot{c} = \frac{1}{\sigma}(A-n-\beta), \dot{k} = Ak - nk - c \tag{3.57}$$

解：给定消费的动态方程，求解微分方程得到

$$c(t) = c(0)e^{\frac{A-n-\beta}{\sigma}t} \tag{3.58}$$

其中 $c(0)$ 表示初期的消费水平，初始条件并未给出，需要进一步求解；考察资本积累的动态方程，求解得到

$$\lim_{t\to\infty} k(t)e^{-(A-n)t} - k(0) = -\int_0^\infty c(t)e^{-(A-n)t}dt \tag{3.59}$$

$$= -\int_0^\infty c(0)e^{[\frac{A-n-\beta}{\sigma}-(A-n)]t}dt \tag{3.60}$$

其中根据 *NPG* 得到 $\lim_{t\to\infty} k(t)e^{-(A-n)t} = 0$，化简得到

$$c(0) = \frac{k(0)}{\int_0^\infty e^{[\frac{A-n-\beta}{\sigma}-(A-n)]t}dt} \tag{3.61}$$

$$= [(A-n) - \frac{A-n-\beta}{\sigma}]k(0) \tag{3.62}$$

其中 $\frac{A-n-\beta}{\sigma} < A-n$，分母中反常积分收敛。因此消费显示路径表示为

$$c(t) = [(A-n) - \frac{A-n-\beta}{\sigma}]k(0)e^{\frac{A-n-\beta}{\sigma}t} \tag{3.63}$$

对于资本积累动态，积分得到

$$k(t) = [k(0) - \int_0^t c(0)e^{[\frac{A-n-\beta}{\sigma}-(A-n)]v}dv]e^{(A-n)t} \tag{3.64}$$

$$= k(0)e^{\frac{A-n-\beta}{\sigma}t} \tag{3.65}$$

当生产函数为 $f(k) = Ak^\alpha$，线性系统转化为

$$\dot{c} = \frac{1}{\sigma}[A\alpha k^{\alpha-1} - n - \beta], \dot{k} = Ak^\alpha - nk - c \tag{3.66}$$

上述为非线性方程，一般难以求解显式解。但是存在唯一的可求解情形：$\alpha = \sigma$（谢丹阳，*1994JET*），即相对风险厌恶系数（消费跨期替代弹性 $\frac{1}{\sigma}$）和生产函数要素份额参数一致。下面确定显式解：

$$\frac{\dot{c}}{c} = Ak^{\alpha-1} - \frac{n+\beta}{\sigma} \tag{3.67}$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = Ak^{\alpha-1} - n - \frac{c}{k} \tag{3.68}$$

$$\frac{\dot{c}}{c} - \frac{\dot{k}}{k} = \frac{c}{k} + n - \frac{n+\beta}{\sigma} = \frac{\dot{\overline{c/k}}}{(c/k)} \to \frac{c}{k} = n - \frac{n+\beta}{\sigma} \tag{3.69}$$

$$\to \dot{k} = Ak^\alpha - nk - (n - \frac{n+\beta}{\sigma})k \tag{3.70}$$

该方程为关于 k 的伯努利微分方程，可以确定显式解。但是注意到，根据数据拟合估计的消费者相对风险厌恶系数 σ 至少要大于 2，而要素份额 $\alpha \in (0,1)$，两者在现实中并不相等。

[36]注意到价格在这里被单位化为 1 因此并没有考虑价格的内生性问题。

3.3.6 动力系统方法

如果不能确定显式解，利用动力系统的方法讨论该二维系统的均衡点（*steady state*）。如果该均衡点是稳定的，则可以利用对稳态均衡点的讨论代替对于路径的讨论。给定 *Ramsey Model* 二维动力系统：

$$\dot{c} = 0 \to \frac{u'(c)}{u''(c)}[f'(k) - n - \beta] = 0 \to f'(k) - n - \beta = 0 \tag{3.71}$$

$$\dot{k} = 0 \to f(k) - nk - c = 0 \to (k^*, c^*) \tag{3.72}$$

该二维动力系统存在鞍点稳态的均衡点（理性系统）。

proof: 给定 $f'(k) = n + \beta$，根据 $f''(k) < 0$，必然存在唯一的均衡点 $k^* = f^{-1}(n+\beta)$，从而可以确定消费的均衡点 $c^* = f(k^*) - nk^*$，这表明该系统存在唯一的均衡点，下面考察均衡点的稳定性，动力系统在均衡点附近线性展开

$$\dot{k} = [f(k^*) - nk^* - c^*] + (f'(k^*) - n)(k - k^*) - (c - c^*) \tag{3.73}$$

$$= (f'(k^*) - n)(k - k^*) - (c - c^*) \tag{3.74}$$

$$\dot{c} = -\frac{u'(c^*)}{u''(c^*)}[f'(k^*) - n - \beta] + (-\frac{u'(c^*)}{u''(c^*)}f''(k^*))(k - k^*) + M[f'(k^*) - n - \beta] \tag{3.75}$$

$$= -\frac{u'(c^*)}{u''(c^*)}f''(k^*)(k - k^*) \tag{3.76}$$

其中 M 表示 $-\frac{u'(c^*)}{u''(c^*)}$ 对 c 的导数。给出系数矩阵

$$\begin{bmatrix} \dot{k} \\ \dot{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'(k^*) - n & -1 \\ -\frac{u'(c^*)}{u''(c^*)}f''(k^*) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k - k^* \\ c - c^* \end{bmatrix} \tag{3.77}$$

特征根假定为 $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1\lambda_2 = -\frac{u'(c^*)}{u''(c^*)}f''(k^*) < 0$，特征根一正一负，该系统的均衡点是鞍点稳定的，从而我们可以利用 c^*, k^* 代替对于 c_t, k_t 的讨论。

3.3.7 比较 *Solow Model* 与 *Ramsey Model*

给定 *Solow Model* 中均衡给定为

$$sf(k^*) = nk^* \tag{3.78}$$

在黄金法则下面我们有 $f'(k_g) = n$ 以保证外生储蓄率达到最优水平。*Ramsey Model* 中均衡给定为

$$f'(k^*) = n + \beta \tag{3.79}$$

可以证明 *Ramsey Model* 对应的稳定均衡点就是 *Pareto* 最优的，但是在 *Solow Model* 中稳态均衡点可能并非是 *Pareto* 最优的，此时黄金率可能是一种 *Pareto* 改进方案（高储蓄率降低到黄金储蓄率）。

其次，*Ramsey Model* 下的均衡状态为 $f'(k^*) = n + \beta$，此时消费者考虑跨期消费选择下的理性消费路径，而 *Solow Model* 是静态的不具备跨期选择的消费路径，可以将 *Ramsey Model* 视为对 *Solow Model* 的动态修正，即 $f'(k^*) = n + \beta$ 可以视为**修正的黄金法则**（*modified golden rule*），增加了跨期消费选择中消费者区分今天与未来的贴现因子 β。可以理解为，考虑跨期差异之后资本存量增加导致产出的增加刚好满足人口的增长。相应的我们有

$$f'(k^*) = n + \beta > n = f'(k_g) \to k^*_{Ramsey} < k_g^{Solow} \tag{3.80}$$

Ramsey Model 中稳态资本存量小于 *Solow Model* 中的黄金资本存量水平，即在到达黄金率水平前已经到达稳态水平。$k^* > k_g$ 的情形不会出现在 *Ramsey Model* 中，而是会出现在 OLG 模型中体现动态无效率。

其三，从储蓄率的角度考察，假定效用函数为 CRRA 形式，生产函数为 $f(k)=Ak^{\alpha}$，Solow Model 模型中黄金率对应的储蓄率表示为 $s_g=\alpha$（资本份额），*Ramsey Model* 得到 $s^*=\frac{\alpha n}{n+\beta}<\alpha=s_g$。其中 $\frac{\partial s^*}{\partial\beta}<0$，经济含义在于跨期贴现因子越大表明未来的效用贴现到当前越少，因此消费者倾向于增加当前消费进而储蓄或未来消费降低。对于一般的效用函数和生产函数，可以利用比较静态分析的方法确定 n,β 等参数对于均衡 c^*,k^* 的影响，可以确定的是贴现因子 β 增加会导致当前消费增加，储蓄降低，进而均衡资本存量水平降低，均衡产出下降。

总而言之，*Solow Model* 和 *Ramsey Model* 模型最大的差异在于是否纳入消费者跨期消费选择的理性行为，而模型中表现出来的就是体现跨期消费选择的关键参数：β。

3.3.8 Ramsey Model 中的动态过渡

考察 *Ramsey Model* 中从非均衡到均衡的过渡过程，借助相位图工具进行分析（鞍点稳定）。

首先在 (c,k) 平面确定 $\dot{c}=0,\dot{k}=0$ 的曲线。其中 $\dot{c}=0\to f'(k^*)=n+\beta$，与 c 无关，是垂直于 k 轴的垂线；对于 $\dot{k}=0\to f(k)=nk+c$，存在黄金率水平 k_g 使得 $f'(k_g)=n$，当 $k<k_g$ 时单调上升，当 $k>k_g$ 时单调下降，其中 $k^*<k_g$（位于黄金率水平的左侧）。

其次考察不同区域的动态变化（交叉偏导）：

$$\frac{\partial\dot{c}}{\partial k}=-\frac{u'(c)}{u''(c)}f''(k)<0,\frac{\partial\dot{k}}{\partial c}=-1<0 \tag{3.81}$$

随着 k 的增加消费降低，因此在 $\dot{c}=0$ 的左侧随着资本增加，消费增加；在 $\dot{c}=0$ 的右侧随着资本增加，消费降低；随着 c 的增加资本 k 降低，因此在 $\dot{k}=0$ 的上方随着消费增加，资本 k 降低；在 $\dot{k}=0$ 的下方随着消费增加，资本 k 增加。

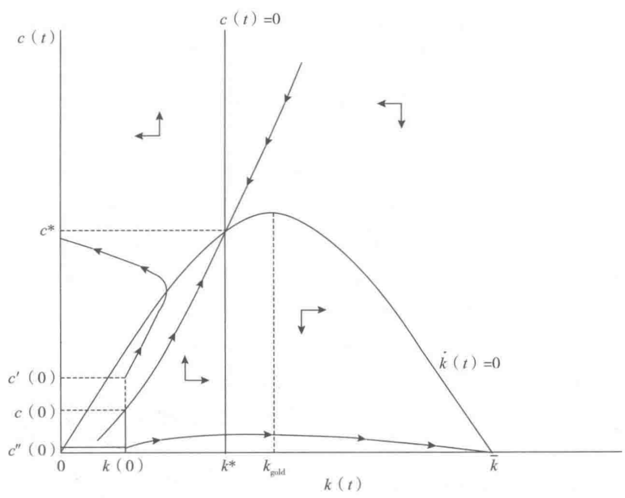


图 8.1 基准新古典增长模型中的转移动态

Notes:Acemoglu Daron, Introduction to Modern Economic Growth, Page 349.

从线性化系统理解动态过渡：

$$\begin{bmatrix}\dot{k}\\ \dot{c}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f'(k^*)-n & -1\\ -\frac{u'(c^*)}{u''(c^*)}f''(k^*) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k-k^*\\ c-c^*\end{bmatrix}$$

假定 $\lambda_1<0,\lambda_2>0$，该线性化系统的解可以确定为（正特征根对应的项不收敛因此系数为 0）

$$k(t)-k^*=(k_0-k^*)e^{\lambda_1 t}\to\dot{k}(t)=\lambda_1(k_0-k^*)e^{\lambda_1 t} \tag{3.82}$$

当 $k_0 \leq k^*$ 时，$\dot{k} > 0$，此时资本存量 k 增加；当 $k_0 \geq k^*$ 时，$\dot{k} < 0$，此时资本存量 k 减少。同时，负特征根 λ_1 的绝对值决定了收敛到均衡点的快慢程度，$|\lambda_1|$ 表示收敛速度[37]。

3.3.9 *Ramsey Model* 中的收敛速度

给定技术进步形式 $f(k) = Ak^\alpha$，定义 *Hamilton* 函数

$$H = u(c)e^{\beta t} + \lambda(t)[Ak^\alpha - nk - c]$$

其中 $\lambda(t)$ 是 *Hamilton* 乘子，表示状态变量 $k(t)$ 的边际值。根据极大值原理可知最优解满足如下条件：

$$\frac{\partial H}{\partial c} = u'(c)e^{-\beta t} - \lambda = 0$$
$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial k} = -\lambda(f'(k) - n)$$
$$\dot{k}(t) = Ak^\alpha - nk - c, \lim_{t\to\infty} \lambda(t)k(t) = 0$$

根据最优性条件和 *Euler* 方程可得消费的动态过程，最终该动态问题由以下二维动力系统给定：

$$\dot{c}(t) = \frac{c}{\sigma}[\alpha Ak^{\alpha-1} - n - \beta]$$
$$\dot{k}(t) = Ak^\alpha - nk - c$$

均衡点表示为 (k^*, c^*)：

$$\alpha Ak^{\alpha-1} - n - \beta = 0 \to k^* = (\frac{n+\beta}{\alpha A})^{\frac{1}{\alpha-1}}$$
$$Ak^\alpha - nk - c = 0 \to c^* = (\frac{n+\beta}{\alpha A})^{\frac{1}{\alpha-1}}(\frac{(1-\alpha)n+\beta}{\alpha})$$

将二维动力系统在均衡点 (k^*, c^*) 附近线性化展开，得到

$$\begin{aligned}\dot{c}(t) &= \frac{1}{\sigma}[\alpha Ak^{*\alpha-1} - n - \beta](c - c^*) + \frac{c^*}{\sigma}\alpha(\alpha-1)Ak^{*\alpha-2}(k - k^*)\\ &= \frac{c^*}{\sigma}\alpha(\alpha-1)Ak^{*\alpha-2}(k - k^*)\\ \dot{k}(t) &= -(c - c^*) + (\alpha Ak^{*\alpha-1} - n)(k - k^*)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{c}(t)\\ \dot{k}(t)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0 & \frac{c^*}{\sigma}\alpha(\alpha-1)Ak^{*\alpha-2}\\ -1 & \alpha Ak^{*\alpha-1} - n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c - c^*\\ k - k^*\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}0 & \frac{\alpha-1}{\alpha\sigma}((1-\alpha)n+\beta)(n+\beta)\\ -1 & \beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c - c^*\\ k - k^*\end{bmatrix}\end{aligned}$$

假定该线性化矩阵特征值为 λ_1, λ_2，特征方程表示为

$$\lambda^2 - \beta\lambda + \frac{\alpha-1}{\alpha\sigma}((1-\alpha)n+\beta)(n+\beta)$$

因此对应的特征根表示为

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}[\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\frac{1-\alpha}{\alpha\sigma}((1-\alpha)n+\beta)(n+\beta)}] < 0$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{2}[\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\frac{1-\alpha}{\alpha\sigma}((1-\alpha)n+\beta)(n+\beta)}] > 0$$

稳态附近经济的收敛速度表示为

$$|\lambda_1| = \frac{1}{2}[\sqrt{\beta + 4\frac{1-\alpha}{\alpha\sigma}((1-\alpha)n+\beta)(n+\beta)} - \beta]$$

注意：上述讨论是在均衡点附近的稳定性，是局部稳定性；*Bumerister and Dobell* 在 *Mathematical Theories of Economic Growth* 讨论了 *Ramsey Model* 中的全局稳定性和收敛性质：$\dot{c}(t)\dot{k}(t) \leq 0$。

[37] *Barro,1995*：*Economic Growth* 中关于收敛速度的讨论，进一步的可以讨论比较收敛和绝对收敛问题。

3.3.10 *Ramsey Model* 对于增长的解释

Ramsey Model 对于增长的解释与 *Solow Model* 一致，在仅仅将储蓄行为内生化而不引入技术进步的情况下，*Ramsey Model* 并未能给出新的增长解释。$\frac{dotc}{c} = \frac{\dot{k}}{k} = 0$，人均变量在稳态中不增长。为了解释增长，*Solow Model* 中引入技术进步，现在我们在 *Ramsey Model* 中引入技术进步。

3.4 离散 *Ramsey Model*

3.4.1 分散经济

给定消费者的最优化问题: 消费者的总量财富积累表示为

$$A_{t+1} \leq (1+r_t)A_t + w_t L_t - C_t \tag{3.83}$$

进一步人均化得到

$$(1+n)a_{t+1} = (1+r)a_t + w_t - c_t \tag{3.84}$$

因此人均形式的消费者最优化问题表示为

$$\sum \beta^t u(c_t) \tag{3.85}$$

$$(1+n)a_{t+1} = (1+r)a_t + w_t - c_t \tag{3.86}$$

构造 *Lagrange* 函数有

$$\mathcal{L} = \sum \beta^t u(c_t) + \sum \lambda_t[(1+r)a_t + w_t - c_t - (1+n)a_{t+1}] \tag{3.87}$$

一阶条件可以得到

$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = \beta^t u'(c_t) - \lambda_t = 0 \tag{3.88}$$

$$\frac{\partial L}{\partial a_t} = \lambda_t(1+r) - (1+n)\lambda_{t-1} = 0 \tag{3.89}$$

得到最优性条件

$$\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \frac{1+r}{1+n} = 1 \tag{3.90}$$

$$(1+n)a_{t+1} = (1+r)a_t - c_t \tag{3.91}$$

厂商问题的最优化条件给定为

$$r_t = f'(k_t), w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t)$$

给定市场均衡 $A_t = K_t$，进一步可以确定该系统的均衡资源配置由下述方程决定

$$\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \frac{1+f'(k_t)}{1+n} = 1 \tag{3.92}$$

$$(1+n)k_{t+1} = f(k_t) + k_t - c_t \tag{3.93}$$

3.4.2 中央计划者经济

给定中央计划者的最优资源配置问题（简单起见，假定人口增长率为 0，即 $n=0$，当 $n \neq 0$ 时可以通过人均化进行处理）:

$$\sum \beta^t u(c_t) \tag{3.94}$$

$$k_{t+1} \leq k_t + f(k_t) - c_t \tag{3.95}$$

构造 *Lagrange* 函数有

$$\mathcal{L} = \sum \beta^t u(c_t) + \sum \lambda_t [k_t + f(k_t) - c_t - k_{t+1}] \tag{3.96}$$

一阶条件可以得到

$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = \beta^t u'(c_t) - \lambda_t = 0 \tag{3.97}$$

$$\frac{\partial L}{\partial k_t} = \lambda_t (1 + f'(k_t)) - \lambda_{t-1} = 0 \tag{3.98}$$

因此均衡的储蓄和消费由以下动力系统决定

$$\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} [1 + f'(k_{t+1})] = 0 \tag{3.99}$$

$$k_{t+1} = k_t + f(k_t) - c_t \tag{3.100}$$

$$\lim \lambda_t k_t = 0 \to \lim \beta^t u'(c_t) k_{t+1} = 0 \tag{3.101}$$

3.4.3 离散 *Ramsey Model* 均衡点的稳定性与相位图

***proof*:** 给定该动力系统的均衡点为 $(\bar{c}, \bar{k})$，均衡情况下该动力系统转化为：

$$\beta(1 + f'(\bar{k})) = 1$$
$$f(\bar{k}) = \bar{c}$$

考虑到 $f(k)$ 为新古典生产函数，$f(k), f'(k)$ 均为单调函数，因此必然可以唯一确定均衡解 $(\bar{c}, \bar{k})$。接下来我们讨论该均衡点的稳定性：首先将 *Euler* 方程在均衡点 $(\bar{c}, \bar{k})$ 处线性展开，考虑到 $c_t = k_t + f(k_t) - k_{t+1}$，我们将其转换为关于 k_t 的一维动力系统，可以得到

$$\begin{aligned} -u''(\bar{c})((1 + f'(\bar{k}))(k_t - \bar{k}) - (k_{t+1} - \bar{k})) + \beta f''(\bar{k}) u'(\bar{c})(k_{t+1} - \bar{k}) + \\ \beta(1 + f'(\bar{k}) u''(\bar{c})((1 + f'(\bar{k}))(k_{t+1} - \bar{k})) - (k_{t+2-\bar{k}})) = 0 \end{aligned}$$

化简得到

$$-\beta^{-1} u''(\bar{c})(k_t - \bar{k}) + [(1 + \beta^{-1}) u''(\bar{c}) + \beta f''(\bar{k}) u'(\bar{c})](k_{t+1} - \bar{k}) - u''(\bar{c})(k_{t+2} - \bar{k}) = 0$$

转换为矩阵形式我们得到：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} k_{t+2} - \bar{k} \\ k_{t+1} - \bar{k} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 + \beta^{-1} + \frac{f''(\bar{k})/(1+f'(\bar{k}))}{u''(\bar{c})/u'(\bar{c})} & -\beta^{-1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{t+1} - \bar{k} \\ k_t - \bar{k} \end{bmatrix} \\ &= A \begin{bmatrix} k_{t+1} - \bar{k} \\ k_t - \bar{k} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

该一维动力系统的稳定性取决于矩阵 A 的特征根情况。线性方程组对应的特征方程表示为：

$$h(\lambda) = \lambda^2 - (1 + \beta^{-1} + \frac{f''(\bar{k})/(1 + f'(\bar{k}))}{u''(\bar{c})/u'(\bar{c})})\lambda + \beta^{-1}$$

现在我们需要判定特征方程根的情况。$h(0) = \beta^{-1} > 0$, $h(1) = -\frac{f''(\bar{k})/(1+f'(\bar{k}))}{u''(\bar{c})/u'(\bar{c})} < 0$, $\lim_{\lambda \to \infty} h(\lambda) = +\infty$，根据介值定理可以确定该特征方程存在两根 $\lambda_1 \in (0, 1), \lambda_2 \in (1, +\infty)$，因此，该均衡点是鞍点稳定的。

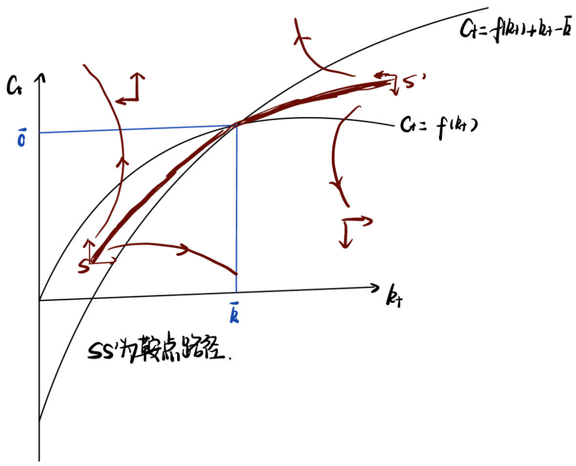
下面我们给出该二维动力系统的相位图：首先讨论 k_t 的分界线

$$k_{t+1} - k_t \geq 0 \Rightarrow f(k_t) - c_t \geq 0 \Rightarrow c_t \leq f(k_t)$$

因此在 (c_t, k_t) 平面内，$c_t = f(k_t)$ 将 k_t 的变化分为两部分，当 $c_t \le f(k_t)$ 时，$k_{t+1} - k_t \ge 0$；当 $c_t \ge f(k_t)$ 时，$k_{t+1} - k_t \le 0$。其次我们讨论 c_t 的分界线

$$\begin{aligned}
c_{t+1} - c_t \ge 0 &\Rightarrow \beta u'(c_{t+1}) \le \beta u'(c_t) \\
&\Rightarrow \frac{u'(c_t)}{1 + f'(k_{t+1})} \le \beta u'(c_t) \\
&\Rightarrow 1 \le \beta(1 + f'(k_{t+1})) \\
&\Rightarrow \beta(1 + f'(\bar{k})) \le \beta(1 + f'(k_{t+1})), f''(k_t) \le 0 \\
&\Rightarrow k_{t+1} \le \bar{k} \\
&\Rightarrow f(k_t) + k_t - c_t \le \bar{k} \\
&\Rightarrow c_t \ge f(k_t) + k_t - \bar{k}
\end{aligned}$$

因此在 (c_t, k_t) 平面内，$c_t = f(k_t) + k_t - \bar{k}$ 将 c_t 的变化分为两部分，当 $c_t \ge f(k_t) + k_t - \bar{k}$ 时，$c_{t+1} \ge c_t$；当 $c_t \le f(k_t) + k_t - \bar{k}$ 时，$c_{t+1} \le c_t$。据此可以画出该二维动力系统的相位图：



3.5 引入技术进步的 *Ramsey Model*

3.5.1 中央计划者经济

引入技术进步并未产生任何扭曲，此时分散经济均衡和中央计划者经济均衡等价。定义技术进步为 $\frac{\dot{A}}{A} = x$，总量的中央计划者问题给定为

$$max_C \int_0^\infty u(C)e^{-\rho t}dt \tag{3.102}$$

$$s.t.\ \dot{K} = F(K, AL) - C \tag{3.103}$$

其中技术进步采用 *Harrod* 中性形式（劳动增进型）。定义有效人均形式 $\hat{k} = \frac{K}{AL}$，因此有效人均资本的动态积累转化为

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - (n + x)\hat{k} - \hat{c} \tag{3.104}$$

对于目标函数可以处理为

$$\int_0^\infty u(C)e^{-\rho t}dt = \int_0^\infty u(\hat{c}\hat{e}^{xt})L(0)e^{nt}e^{-\rho t}dt = \int_0^\infty u(\hat{c}e^{xt})e^{-\beta t}dt \tag{3.105}$$

转化为有效人均形式的中央计划者问题

$$max_{\hat{c}} \int_0^\infty u(\hat{c}e^{xt})e^{-\beta t}dt \tag{3.106}$$

$$s.t.\ \dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - (n+x)\hat{k} - \hat{c}, \hat{k}(0) = \hat{k}_0 \tag{3.107}$$

假定效用函数为 *CRRA* 形式，*Hamilton* 函数给出最优解满足如下条件；

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{1}{\sigma}[f'(\hat{k}) - n - \beta - \sigma x] \tag{3.108}$$

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - (n+x)\hat{k} - \hat{c} \tag{3.109}$$

Solution：定义 *Hamilton* 函数

$$\mathcal{H} = u(\hat{c}e^{xt})e^{-\beta t} + \lambda(f(\hat{k}) - (n+x)\hat{k} - \hat{c}) \tag{3.110}$$

给定最大值原理得到

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \hat{c}} = u'(\hat{c}e^{xt})e^{-(\beta-x)t} - \lambda = 0 \tag{3.111}$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \hat{k}} = -\lambda(f'(\hat{k}) - n) \tag{3.112}$$

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - (n+x)\hat{k} - \hat{c} \tag{3.113}$$

$$\lim_{T\to\infty} \lambda(T) \geq 0, \lim_{T\to\infty} k(T) \geq 0, \lim_{T\to\infty} \lambda(T)k(T) = 0 \tag{3.114}$$

均衡情况下，稳态有效人均变量 $\hat{c}^*, \hat{k}^*, \hat{y}^*$ 为常数（增长率为 *0*）；稳态人均按照技术进步率 x 增长，因此在引入技术进步后 *Ramsey Model* 的增长解释与 *Solow Model* 依然保持一致。增长的源泉依旧是来自于外生的技术进步，从增长解释的角度来看，*Ramsey Model* 并没有任何进步。想要对增长源泉提供更深入的了解，必须将技术进步转变为内生形式。

3.5.2 均衡点的存在性、唯一性和稳定性

给定 $f(\hat{k})$ 为人均有效形式的新古典生产函数，$f''(\hat{k}) < 0$，因此 $f'(\hat{k})$ 在 $(0,\infty)$ 上单调递减，同时根据 *Inada* 条件可知：$\lim_{t\to 0} f'(\hat{k}) = \infty, \lim_{t\to\infty} f'(\hat{k}) = 0$，因此必然存在唯一的均衡点 k^* 满足 $f'(k^*) = n + x + \beta$，从而必然存在唯一的均衡点 $\hat{c}^* = f(\hat{k}^*) - (n+x)\hat{k}^*$，因此均衡点 $(\hat{c}^*, \hat{k}^*)$ 存在且唯一。将上述二维动力系统在稳定点附近线性化展开得到：

$$\dot{\hat{c}} = \frac{\hat{c}}{\sigma}[f''(\hat{k})](\hat{k} - \hat{k}^*)$$

$$\dot{\hat{k}} = -(\hat{c} - \hat{c}^*) + (f'(\hat{k}^*) - n - x)(\hat{k} - \hat{k}^*)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{c}} \\ \dot{\hat{k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\hat{c}^*}{\sigma}[f''(\hat{k}^*)] \\ -1 & f'(\hat{k}^*) - n - x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{c} - \hat{c}^* \\ \hat{k} - \hat{k}^* \end{bmatrix}$$

假定线性化系数矩阵特征值为 λ_1, λ_2，可知 $\lambda_1\lambda_2 = \frac{\hat{c}^*}{\sigma}[f''(\hat{k}^*)] < 0, \lambda_1 + \lambda_2 = f'(\hat{k}^*) - n - x > 0$，此时必然有 $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$，均衡点是鞍点稳定的。

给定均衡状态，取全微分得到

$$f''(\hat{k}^*)d\hat{k}^* = dn + dx + d\beta$$

$$f'(\hat{k}^*)d\hat{k}^* - (n+x)d\hat{k}^* = \hat{k}^*dn + \hat{k}^*dx + d\hat{c}^*$$

考察技术进步 x 对经济的影响，令 $dn=0$，可知

$$\frac{d\hat{k}^*}{dx}=\frac{\sigma}{f''(\hat{k}^*)}<0,\frac{d\hat{y}^*}{dx}=f'(\hat{k}^*)\frac{d\hat{k}^*}{dx}<0,\frac{d\hat{c}^*}{dx}=(f'(\hat{k}^*)-n-x)\frac{d\hat{k}^*}{dx}<0$$
$$\frac{d\hat{r}^*}{dx}=f''(\hat{k}^*)\frac{d\hat{k}^*}{dx}>0,\frac{d\hat{w}^*}{dx}=-\hat{k}^*f'(\hat{k}^*)\frac{d\hat{k}^*}{dx}<0$$

注意到这里是对于有效人均变量的影响而非人均变量的影响。

3.6 引入财政政策的 *Ramsey Model*

现在考察 *Ramsey* 模型中引入政府的财政政策。给定政府的税收包括资本所得税 τ_r、劳动所得税 τ_w、消费税 τ_c 和一揽子税 τ，相应的政府税收表示为

$$T=\tau_r r_t A_t+\tau_w w_t L_t+\tau_c c_t+\tau \tag{3.115}$$

根据不同税收作用的形式不同，会得到不同的均衡状态。在 *Ramsey Model* 中引入税收和公共开支是为了进一步考察福利效应，基本思路是分别确定集中经济和分散经济中的均衡状态，从而进行比较，考察在分散经济中税收是否导致行为扭曲。注意到，*Ramsey Model* 应当从总量模型建立，从而变在人均化处理上的失误，特别是政策引入应该首先给出加总层面的方程调整。

3.6.1 引入资本税和劳动税

分散经济问题

假定 $\tau_r=\tau_w=\tau,\tau_c=\tau=0$，此时税收体系中进包含资本税和劳动税，家庭部门的财富动态表示为

$$\dot{A}_t=(1-\tau)(r_t A_t+w_t L_t)-C_t \tag{3.116}$$

进一步的人均化可以得到

$$\dot{a}_t=(1-\tau)(r_t a_t+w_t)-na_t-c_t \tag{3.117}$$

因此引入资本税和劳动税之后的消费者最优化问题给定为

$$max_{c_t,a_t}\ \int_0^T u(c_t)e^{-\beta t}dt \tag{3.118}$$
$$\dot{a}_t=(1-\tau)(r_t a_t+w_t)-na_t-c_t,\ a_0,\ a(T)\geq 0 \tag{3.119}$$

定义 *Hamilton* 函数得到优化条件

$$\dot{c}_t=-\frac{u'(c_t)}{u''(c_t)}((1-\tau)r-n-\beta) \tag{3.120}$$
$$\dot{a}(t)=(1-\tau)(r_t a_t+w_t)-na_t-c_t \tag{3.121}$$
$$a(t_0)=a_0,\lambda(T)a(T)=0 \tag{3.122}$$

厂商行为不发生改变，满足生产最优化决策

$$r_t=f'(k_t),w_t=f(k_t)-k_t f'(k_t) \tag{3.123}$$

政府行为给定为：假定政府满足预算约束平衡，税收收入等于公共支出，可以得到政府的总量预算约束和人均预算约束

$$\tau(r_t A_t+w_t L_t)=G_t \tag{3.124}$$
$$\tau(r_t a_t+w_t)=g \tag{3.125}$$

给定市场出清条件 $A_t = K_t$，可以得到

$$\dot{c}_t = -\frac{u'(c_t)}{u''(c_t)}((1-\tau)f'(k_t) - n - \beta) \tag{3.126}$$

$$\dot{k}(t) = (1-\tau)f(k_t) - nk_t - c_t = f(k_t) - nk_t - c_t - g \tag{3.127}$$

$$k(t_0) = k_0, k(T)u'(c_T)e^{-\beta T} = 0 \tag{3.128}$$

中央计划者问题

首先确定社会经济中的资源约束满足：$Y = C + I + G$，相应得到到总量资本积累动态 $\dot{K}_t = I_t = F(K_t, L_t) - C_t - G$，人均化处理为

$$\dot{k}_t = f(k_t) - nk_t - c_t - g \tag{3.129}$$

给定中央计划者的最优化问题

$$max_{c_t,k_t} \int_0^T u(c_t)e^{-\beta t}dt \tag{3.130}$$

$$\dot{k}_t = f(k_t) - nk_t - c_t - g \tag{3.131}$$

$$k(t_0) = k_0, \lambda(T)k(T) = 0 \tag{3.132}$$

定义 *Hamilton* 函数得到优化条件

$$\dot{c}_t = -\frac{u'(c_t)}{u''(c_t)}(f'(k_t) - n - \beta) \tag{3.133}$$

$$\dot{k}_t = f(k_t) - nk_t - c_t - g \tag{3.134}$$

$$a(t_0) = a_0, k(T)u'(c_T)e^{-\beta T} = 0 \tag{3.135}$$

给定分散经济的均衡路径与中央计划者经济的均衡路径，资本积累动态相同，但是居民的消费行为存在差异：给定资本税和劳动税，居民收入水平降低从而导致长期的资本积累动态劣于中央计划者经济，从而形成资本税和劳动税等收入税对于居民消费的扭曲。

为了更清楚的确定上述结论，给定分散经济的均衡 (k_d^*, c_d^*)：

$$(1-\tau)f'(k_t) - n - \beta = 0 \to k_d^* \tag{3.136}$$

$$f(k_t) - nk_t - c_t - g = 0 \to c_d^* \tag{3.137}$$

中央计划者的均衡表示为 (k_p^*, c_p^*)

$$f'(k_t) - n - \beta = 0 \to k_p^* \tag{3.138}$$

$$f(k_t) - nk_t - c_t - g = 0 \to c_p^* \tag{3.139}$$

3.6.2 分散经济与中央计划者经济的比较

分散经济不等于中央计划者经济，我们需要比较中央计划均衡和分散均衡情况下稳态存量水平。在引入资本税和劳动税的情形下，比较资本存量水平可以得到 $f'(k_p^*) = (1-\tau)f'(k_d^*) < f'(k_d^*)$，给定生产函数的凹性可以得到 $k_d^* < k_p^*$，即分散经济的均衡资本存量低于中央计划者经济均衡，同理可以确定消费 $c^* = f(k^*) - nk^* - g$ 中，$c_d^* < c_p^*$。综上可知引入收入税之后分散经济的资本存量和消费水平均低于最优水平，存在明显的福利损失。分散经济和中央计划者经济可以用于分析政府行为的扭曲性。

具体的，分散经济相比于中央计划者经济可以实现如下最优解形式：

1. *first best*：如果政府政策使得分散经济均衡达到中央计划者经济的均衡，表明政策不存在扭曲，该种情形定义为 *first best*；

2. *second best*：如果政府政策下的分散经济均衡无法达到中央计划者经济均衡，那么在分散经济个体最优的基础上，政府制定最优决策的情形定义为 *second best*（次优）；

3. *third best*：给定次优解，寻找政府决策具有时间一致性的解，该种情形定义为 *third best*，是一种在长期中相比于次优解更优的情形；

3.6.3 引入收入税

下面我们重新表述三种税收问题：给定一般化的模型设定

$$\text{Firm: } \max_{K,L} F(K,L) - rK - wL \Rightarrow \begin{cases} r = f'(k) \\ w = f(k) - f'(k)k \end{cases} \quad \text{Equi: } a = k \text{ Gov: } G = \tau(rA + wL) = \tau_c c + \bar{T}L$$

$$\text{Consumer: } \begin{cases} \dot{A} = (1-\tau)(rA + wL) - C \Rightarrow \dot{a} = ((1-\tau)r - n)a + (1-\tau)w - c \text{ (Income Tax)} \\ \dot{A} = rA + wL - \tau_c C \Rightarrow \dot{a} = ra + w - \tau_c c - na \text{ (Consumption Tax)} \\ \dot{A} = rA + wT - C - \bar{T}L \Rightarrow \dot{a} = ra + w - c - \bar{T} - na \text{ (Poll Tax)} \end{cases}$$

分散经济均衡：

$$\begin{aligned}
&\max_{c,a} \int_0^\infty u(c)e^{-\beta t}dt \text{ (Income Tax)} \\
&\text{s.t. } \dot{a} = ((1-\tau)r - n)a + (1-\tau)w - c, a(0) \\
&H = u(c)e^{-\beta t} + \lambda(((1-\tau)r - n)a + (1-\tau)w - c) \\
&\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial c} = u'(c)e^{-\beta t} - \lambda \Rightarrow \begin{cases} \lambda = u'e^{-\beta t} \\ \dot{\lambda} = u''e^{-\beta t}\dot{c} - \beta u'e^{-\beta t} \end{cases} \\ \dot{\lambda} = \frac{-\partial H}{\partial a} = -u'e^{-\beta t}((1-\tau)r - n) \\ \Rightarrow \dot{c} = -\frac{u'(c)}{u''(c)}((1-\tau)r - n - \beta) \\ \dot{a} = ((1-\tau)r - n)a + (1-\tau)w - c, a(0) = a_0 \\ \text{TVC: } \lim_{T\to\infty} \lambda(T)a(T) = u'(c)e^{-\beta T}a(T) = 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \dot{c} = -\frac{u'(c)}{u''(c)}((1-\tau)f'(k) - n - \beta) \\ \dot{k} = \dot{a} = (1-\tau)f(k) - nk - c = f(k) - nk - g - c \\ \lim_{T\to\infty} a(T)\lambda(T) = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

3.6.4 引入消费税

分散经济均衡：

$$\begin{aligned}
&\max_{c,a} \int_0^\infty u(c)e^{-\beta t}dt \text{ (Consumption Tax)} \\
&\text{s.t. } \dot{a} = ra + w - (1+\tau_c)c - na, a(0) \\
&H = u(c)e^{-\beta t} + \lambda((r-n)a + w - (1+\tau_c)c) \\
&\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial c} = u'(c)e^{-\beta t} - (1+\tau_c)\lambda \\ \Rightarrow \begin{cases} \lambda = u'e^{-\beta t}/(1+\tau_c) \\ \dot{\lambda} = (u''e^{-\beta t}\dot{c} - \beta u'e^{-\beta t})/(1+\tau_c) \end{cases} \\ \dot{\lambda} = \frac{-\partial H}{\partial a} = -u'e^{-\beta t}(r-n) \\ \Rightarrow \dot{c} = -\frac{u'(c)}{u''(c)}(r - n - \beta) \\ \dot{a} = (r-n)a + w - \dfrac{1}{1+\tau_c}c, a(0) = a_0 \\ \text{TVC: } \lim_{T\to\infty} \lambda(T)a(T) = u'(c)e^{-\beta T}a(T) = 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \dot{c} = -\frac{u'(c)}{u''(c)}(f'(k) - n - \beta) \\ \dot{k} = f(k) - nk - g - c \\ \lim_{T\to\infty} a(T)\lambda(T) = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

3.6.5 引入一揽子税

分散经济均衡:

$$
\begin{aligned}
&\max_{c,a}\int_0^\infty u(c)e^{-\beta t}dt \text{ (Poll Tax)}\\
&\text{s.t. } \dot{a}=ra+w-c-\boxed{-\bar{T}}-na, a(0)\\
H&=u(c)e^{-\beta t}+\lambda((r-n)a+w-c\boxed{-\bar{T}})\\
&\Rightarrow\begin{cases}
\frac{\partial H}{\partial c}=u'(c)e^{-\beta t}-\lambda\Rightarrow\begin{cases}\lambda=u'e^{-\beta t}\\ \dot{\lambda}=(u''e^{-\beta t}\dot{c}-\beta u'e^{-\beta t})\end{cases}\\
\dot{\lambda}=\frac{-\partial H}{\partial a}=-u'e^{-\beta t}(r-n)\\
\Rightarrow\dot{c}=-\frac{u'(c)}{u''(c)}(r-n-\beta)\\
\dot{a}=(r-n)a+w-c\boxed{-\bar{T}}, a(0)=a_0\\
\text{TVC: }\lim_{T\to\infty}\lambda(T)a(T)=u'(c)e^{-\beta T}a(T)=0
\end{cases}\\
&\Rightarrow\begin{cases}
\dot{c}=-\frac{u'(c)}{u''(c)}(f'(k)-n-\beta)\\
\dot{k}=f(k)-nk\boxed{-g}-c\\
\lim_{T\to\infty}a(T)\lambda(T)=0
\end{cases}
\end{aligned}
$$

3.6.6 中央计划者经济

上述三种税收的中央计划者问题是一致的:

$$
\begin{cases}
\dot{K}=F(K,L)-C-G\Rightarrow\dot{k}=f(k)-nk-c-g\\
\dot{K}=F(K,L)-C-\tau_cC=F(K,L)-C-G\Rightarrow\dot{k}=f(k)-nk-c-g\\
\dot{K}=F(K,L)-C-\bar{T}L=F(K,L)-C-G\Rightarrow\dot{k}=f(k)-nk-c-g
\end{cases}
\quad
\begin{aligned}
&\max_{c,a}\int_0^\infty u(c)e^{-\beta t}dt\\
&\text{s.t. } \dot{k}=f(k)-nk-c\boxed{-g}, a(0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H&=u(c)e^{-\beta t}+\lambda(f(k)-nk-c\boxed{-g})\\
&\Rightarrow\begin{cases}
\frac{\partial H}{\partial c}=u'(c)e^{-\beta t}-\lambda\Rightarrow\begin{cases}\lambda=u'e^{-\beta t}\\ \dot{\lambda}=u''e^{-\beta t}\dot{c}-\beta u'e^{-\beta t}\end{cases}\\
\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial a}=-\lambda(r-n)=-u'e^{-\beta t}(r-n)\Rightarrow\dot{c}=-\frac{u'(c)}{u''(c)}(r-n-\beta)\\
\dot{k}=f(k)-nk-c\boxed{-g}, k(0)\\
\text{TVC: }\lim_{T\to\infty}\lambda(T)k(T)=u'(c)e^{-\beta T}k(T)=0, \lim_{T\to\infty}k(T)=0, \lim_{T\to\infty}\lambda(T)=0
\end{cases}\\
&\Rightarrow\begin{cases}
\dot{c}=-\frac{u'(c)}{u''(c)}(f'(k)-n-\beta)\\
\dot{k}=f(k)-nk-c\boxed{-g}\\
\lim_{T\to\infty}u'(c)e^{-\beta T}k(T)=0
\end{cases}
\end{aligned}
$$

注意到，在引入消费税和一揽子税的情况下，分散经济均衡等价于中央计划者经济；在引入资本税和劳动税等收入税的情况下，分散经济均衡不等价于中央计划者经济，税收存在扭曲。

3.6.7 公共支出进入效用函数

在 *Solow* 模型中，$\frac{dk^*}{dg}<0$，即政府将居民资本存量中拿走一部分消费而不带来任何产出，政府部门并没有任何决策，因此资本存量降低；因此后续将公共支出引入效用函数以及生产函数来处理这一问题，将政府行为纳入模型。考虑公共支出进入生产函数的形式，可以证明 $\frac{dk^*}{dg}=\frac{sf_g-1}{sf_k-n}$ 不确定，取决于公共支出对于经济的边际效应到底有多大。

给定中央计划者经济

$$max\int_0^\infty u(c,g)e^{\beta t}dt \tag{3.140}$$

$$s.t.\ \dot{k}=f(k)-nk-c-g, k_0 \tag{3.141}$$

动力系统满足

$$\dot{c} = -\frac{u'(c,g)}{u''(c,g)}[f'(k) - n - \beta] \tag{3.142}$$

$$\dot{k} = f(k) - nk - c - g \tag{3.143}$$

可以证明 $\frac{dk^*}{dg} = 0, \frac{dc^*}{dg} = -1$。容易理解，由于公共支出只进入效用函数，从而无法改变生产侧的行为因此并不会对实际经济产生影响，因此稳态资本存量不会发生改变。给定如下初始条件和终止条件：

$$k(0) = k_0, \lim e^{-\beta t} u_c(c,k)k(t) = 0 \tag{3.144}$$

由于内生变量个数与方程个数相等，微分方程个数与条件个数相等，因此可以确定唯一的 $(c(t), k(t))$ 路径。(PS：动力系统解的唯一性需要保证，分别给出了初始条件和 TVC，其中 TVC 有助于判别解的唯一性。其中，标准的 *Ramsey Model* 的横截性条件直接给出为 $\lim_{t\to\infty} e^{-\beta t} u_c'(c)k(t) = 0$，很多情况的判别来自于 TVC 的假定，即消费的增长不能快于资本的增长，否则会导致庞氏骗局。)

3.6.8 公共支出进入生产函数

假定 $f_{kg} > 0, f_{gg} < 0, f_g > 0$，经济含义在于公共支出可以提高企业边际生产率，交叉偏导大于 0；中央计划者经济问题表示为

$$max \int_0^\infty u(c)e^{\beta t}dt \tag{3.145}$$

$$s.t.\ \dot{k} = f(k,g) - nk - c - g, k_0 \tag{3.146}$$

动力系统满足

$$\dot{c} = -\frac{u'(c)}{u''(c)}[f_k'(k,g) - n - \beta] \tag{3.147}$$

$$\dot{k} = f(k,g) - nk - c - g \tag{3.148}$$

均衡状态下有

$$f_k'(k,g) - n - \beta = 0 \tag{3.149}$$

$$f(k,g) - nk - c - g = 0 \tag{3.150}$$

可以证明 $\frac{dk^*}{dg} > 0$，对于均衡消费而言 $\frac{dc^*}{dg}$ 并不确定。容易理解，公共支出促进了企业生产效率提高进而提高了稳态资本存量。

Proof: 比较静态分析给定如下

$f(k,g), f_g > 0, f_{gg} < 0, f_{kg} > 0$

$$\begin{cases} \dot{c} = -\frac{u'(c)}{u''(c)}(f_k - n - \beta) \\ \dot{k} = f(k,g) - nk - c - g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_k(k^*,g) - n - \beta = 0 \\ f(k^*,g) - nk^* - c^* - g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_{kk}dk^* + f_{kg}dg = 0 \\ f_k dk^* + f_g dg - ndk^* - dc^* - dg = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} f_{kk} & 0 \\ f_k - n & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dk^* \\ dc^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -f_{kg}dg \\ (1-f_g)dg \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dk^*}{dg} = -\frac{f_{kg}}{f_{kk}} > 0 \\ \frac{dc^*}{dg} = \frac{f_{kk}(1-f_g)+f_{kg}\beta}{-f_{kk}} \end{cases}$$

Barro(1990JPE) 以及 *Arrow and Katz(1970Handbook)* 对于政府公共支出的讨论：公共支出可以进入效用函数和生产函数，并进一步讨论政府支出结构的问题。除此之外，还包括公共资本 k_g，此时经济中存在两类资本：私人资本 k_p 和公共资本 k_g，私人资本为居民和企业所有，公共资本为公共部门所有。一般情况下，效用函数表示为 $u(c,g,k_g)$，生产函数表示为 $f(k_p,k_g)$，公共资本（道路建设等）对于生产和效用均有作用，公共支出（公园等）则仅对私人效用有作用。

3.7 引入货币政策的 *Ramsey Model*

3.7.1 消费者问题

考虑分散经济均衡[38]，给定消费者问题，在没有引入货币的问题下表示为

$$max \int u(C)e^{-\rho t}dt \tag{3.151}$$

$$s.t.\ \dot{A} = rA + wL - C, A(0) \tag{3.152}$$

现在引入货币，消费者资产包括实物资产 K 和货币资产 M（名义量，不存在持有回报），实物资本收益为 rK，消费者资产动态表示为（转化为实际变量）

$$\dot{K} + \dot{M}/P = rK + 0 \cdot M + wL + X - C,\ K_0, M_0 \tag{3.153}$$

其中 X 表示政府的转移支付。在 *Solow* 框架下我们假定 $\frac{M}{K} = \phi(r, \pi)$，现在我们从最优选择的框架下给出该问题：假定货币直接影响居民效用（MIU），定义效用函数表示为 $u(C, \frac{M}{P})$，假定持有实际货币越多效用越多，满足边际效用递减且满足 *Inada* 条件。此时，货币的存在性是自然的，不需要额外证明实体经济中为何货币[39]。

消费者问题表示为：

$$max \int u(C, \frac{M}{P})e^{-\rho t}dt \tag{3.154}$$

$$s.t.\ \dot{K} = rK + wL + X - C, A(0) \tag{3.155}$$

人均化处理为 $m = \frac{M}{PL}$，相应的有

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} - nk, \dot{m} = \frac{\dot{M}}{PL} = \frac{\dot{M}}{PL} - (\pi + n)m \tag{3.156}$$

$$\dot{k} + \dot{m} = rk + w + x - c - nk - (\pi + n)m, k_0 = \frac{K_0}{L_0}, m_0 = \frac{M_0}{P_0 L_0} \tag{3.157}$$

人均化目标函数转化为

$$max \int u(c, m)e^{-\beta t}dt \tag{3.158}$$

其中 β 表示经过人口调整后的贴现因子（$\beta = \rho - n$）。消费者问题表示为

$$max_{c,k,m} \int u(c, m)e^{-\beta t}dt \tag{3.159}$$

$$s.t.\ \dot{k} + \dot{m} = rk + w + x - c - nk - (\pi + n)m \tag{3.160}$$

$$k_0 = \frac{K_0}{L_0}, m_0 = \frac{M_0}{P_0 L_0} \tag{3.161}$$

控制变量是 c，状态变量是 k, m。为解决该问题，我们可以使用如下两种形式进行处理：

一种处理方式是引入控制变量 y 表示储蓄中用于货币资产积累的部分，问题重新表示为：

$$max_{c,k,m,y} \int u(c, m)e^{-\beta t}dt \tag{3.162}$$

$$s.t.\ \dot{k} = rk + w + x - c - nk - (\pi + n)m - y \tag{3.163}$$

$$\dot{m} = y \tag{3.164}$$

$$k_0 = \frac{K_0}{L_0}, m_0 = \frac{M_0}{P_0 L_0} \tag{3.165}$$

[38]思考：引入货币政策的 Ramsey Model 存不存在中央计划者均衡？

[39]我们总可以将需要解决的问题引入效用函数来避免对其存在性的讨论，但是这种讨论并未解决存在性，而且将模型建立为没有微观基础的处理上。

控制变量是 c,y，状态变量是 k,m，该问题是标准的多控制多状态的动态优化问题。定义 *Hamilton* 函数：

$$H(c,k,m,y,\lambda,\mu)=u(c,m)e^{-\beta t}+\lambda[rk+w+x-c-nk-(\pi+n)m-y]+\mu y \tag{3.166}$$

其中 λ,μ 是 *Hamilton* 乘子，分别是状态变量 k,m 的边际值，最优化条件给定为

$$\frac{\partial H}{\partial c}=u_c'(c,m)e^{-\beta t}-\lambda=0,\frac{\partial H}{\partial y}=-\lambda+\mu=0 \tag{3.167}$$

$$\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial k}=-\lambda(r-n),\dot{\mu}=-\frac{\partial H}{\partial m}=-u_m'(c,m)e^{-\beta t}+\lambda(\pi+n) \tag{3.168}$$

为了保证动力系统均衡解封闭，我们还需要给定如下初始条件和终止条件：

$$k(0)=k_0;\ \lim e^{-\beta t}u_c'(c,m)(k(t)+m(t))=0;\ u_c(c(0),m(0))=0 \tag{3.169}$$

此时内生变量个数与初始-终止条件个数相等，动力系统解封闭（一般而言，需要给出 k_0 的初始条件以及标准的终止条件 TVC）。

另一种处理方式是我们将两种资产合并为实际资产 A，即有 $\dot{A}=\dot{k}+\frac{\dot{M}}{P}$，相应的转化为人均形式

$$max_{c,a,k,m}\int u(c,m)e^{-\beta t}dt \tag{3.170}$$

$$s.t.\ \dot{a}=rk+w+x-c-nk-(\pi+n)m \tag{3.171}$$

$$a=k+m,a_0=k_0+m_0 \tag{3.172}$$

控制变量 c，状态变量为 a，变量 k,m 处理为控制变量，即 k,m 可以消费者投资组合选择的随意调整从而改变实际资产 a。该问题是包含代数约束的动态优化问题（参考动态优化最优控制部分内容），对于微分方程约束利用 *Hamilton* 系统，对于代数约束利用 *Lagrange* 系统。定义 *Hamilton* 系统：

$$H(c,k,m,a,\lambda,\mu)=u(c,m)e^{-\beta t}+\lambda[rk+w+x-c-nk-(\pi+n)m]+\mu(k+m-a) \tag{3.173}$$

其中 λ 是 *Hamilton* 乘子，表示状态变量 a 的边际值，μ 是 *Lagrange* 乘子，是实际资产 a 的边际值（两者都是边际值）。为简单期间，我们假定效用函数可分：$u(c,m)=u(c)+v(m)$。最优化条件满足

$$\frac{\partial H}{\partial c}=u'(c)e^{-\beta t}-\lambda=0,\frac{\partial H}{\partial k}=\lambda(r-n)+\mu=0 \tag{3.174}$$

$$\frac{\partial H}{\partial m}=v'(m)e^{-\beta t}-\lambda(\pi+n)+\mu=0 \tag{3.175}$$

$$\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial a}=\mu \tag{3.176}$$

$$\dot{a}=rk+w+x-c-nk-(\pi+n)m,a_0 \tag{3.177}$$

$$TVC\ \lim_{t\to\infty}a(t)\geq 0,\lim_{t\to\infty}\lambda(t)\geq 0,\lim_{t\to\infty}\lambda(t)a(t)=0 \tag{3.178}$$

$$KT\ \mu\geq 0,(k+m-a)=0,\mu(k+m-a)=0 \tag{3.179}$$

其中对于等式约束 KT 条件自然满足；注意到 $\dot{\lambda}=\mu$，体现了两种边际值之间的关系。简化最优解条件得到

$$\dot{c}=-\frac{u'(c)}{u''(c)}(r-n-\beta) \tag{3.180}$$

$$v'(m)=u'(c)(\pi+r) \tag{3.181}$$

$$\dot{k}+\dot{m}=rk+w+x-c-nk-(\pi+n)m \tag{3.182}$$

对于第 2 个方程的经济含义：$\frac{v'(m)}{u'(c)}=r+\pi$，即持有货币资产的边际效用与消费的边际效用之比（货币资产与消费的替代）等价于边际转移率（边际转移等于边际替代）。

3.7.2 分散经济均衡

厂商的行为没有任何的变动，利润最大化得到

$$r = f'(k), w = f(k) - kf'(k) \tag{3.183}$$

由于货币的存在需要引入政府，其预算约束满足

$$\frac{\dot{M}}{P} = X + G \tag{3.184}$$

政府的货币政策表示为: 决定货币的发行率

$$\frac{\dot{M}}{M} = \theta \tag{3.185}$$

人均化处理得到

$$\frac{\dot{M}}{PL} = \frac{\dot{M}}{M}\frac{M}{PL} = \theta m = x + g \tag{3.186}$$

分散经济均衡表示为

$$\dot{k} + \dot{m} = f(k) - nk - c + (\theta - \pi - n)m \tag{3.187}$$

$$\dot{c} = -\frac{u'(c)}{u''(c)}(f'(k) - n - \beta) \tag{3.188}$$

$$v'(m) = u'(c)(\pi + f'(k)) \tag{3.189}$$

上述三个方程可以决定均衡 (c^*, k^*, m^*)。该三维系统均衡点的存在性、唯一性与稳定性问题。可以证明：线性化系数矩阵 A 必然有 1 个正根和 2 个负根，这要求 c_0, k_0, m_0 只能给出一个从而保证与负根个数一致，系统有解，因此只能有一个初始条件给出，这就意味着 k_0 给出而 m_0 不给出，也即 P_0 无法给出，在上述体系中价格（通货膨胀）是无法给出的。除了货币外，政府还要发行债券，满足约束

$$\frac{\dot{B}}{P} + \frac{\dot{M}}{P} = X + G + r\frac{B}{P} \tag{3.190}$$

消费者持有三种资产：$a = k + m + b$，此时经济中包含三个状态变量，P_0 可以作为初始条件给出因此可以给出价格。

重新将 π 内生化：

$$m = \frac{M}{PL} \rightarrow \frac{\dot{m}}{m} = \theta - n - \pi \tag{3.191}$$

上式是自然成立的（给定人均化定义），但是一般不能直接加入模型系统中进行讨论，将方程加入一定要内生化某个变量，在这里我们将 π 内生化，动力系统进一步转化为

$$\dot{k} + \dot{m} = f(k) - nk - c + (\theta - \pi - n)m \tag{3.192}$$

$$\dot{c} = -\frac{u'(c)}{u''(c)}(f'(k) - n - \beta) \tag{3.193}$$

$$v'(m) = u'(c)(\pi + f'(k)) \tag{3.194}$$

$$\frac{\dot{m}}{m} = \theta - n - \pi \tag{3.195}$$

同时决定 (c, k, m, π)。进一步简化为标准的模型

$$\dot{k} = f(k) - nk - c \tag{3.196}$$

$$\dot{c} = -\frac{u'(c)}{u''(c)}(f'(k) - n - \beta) \tag{3.197}$$

$$v'(m) = u'(c)(\pi + f'(k)) \tag{3.198}$$

$$\dot{m} = (\theta - n - \pi)m \tag{3.199}$$

三个微分方程，给定初始条件 k_0 以及两个 TVC，可以决定均衡变量。均衡点表示为

$$f(k) - nk - c = 0 \tag{3.200}$$

$$f'(k) - n - \beta = 0 \tag{3.201}$$

$$m(\theta - n - \pi) = 0 \tag{3.202}$$

$$v'(m) = u'(c)(\pi + f'(k)) \tag{3.203}$$

讨论均衡点的存在性、唯一性和稳定性。首先要根据 $v'(m) = u'(c)(\pi + f'(k))$ 将 π 表示为 (c, k, m) 的函数关系，重新将其带入到均衡决定中讨论，三维系统简化为

$$f(k) - nk - c = 0 \tag{3.204}$$

$$f'(k) - n - \beta = 0 \tag{3.205}$$

$$m(\theta - n - \pi(c, k, m)) = 0 \tag{3.206}$$

可以证明 $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$，给定初始条件 k_0，系统一定是鞍点稳定的，从而可以利用稳定均衡点代替路径讨论。讨论在均衡点附近的特征（比较静态分析）：根据 $\theta - n - \pi = 0$ 可知 $\frac{d\pi^*}{d\theta} = 1$，通货膨胀与货币供应一一对应（稳态情况下成立的条件）；其次，均衡情况下可以给出

$$f'(k^*) = n + \beta \tag{3.207}$$

$$f(k^*) - nk^* - c^* = 0 \tag{3.208}$$

因此 $\frac{dk^*}{d\theta} = \frac{dy^*}{d\theta} = \frac{dc^*}{d\theta} = \frac{dr^*}{d\theta} = \frac{dw^*}{d\theta} = 0$，即货币供应率 θ（货币政策）不影响实际经济变量，我们称为"**货币超中性**"。

Tobin 模型中存在：$\frac{dk^*}{d\theta} > 0, \frac{dy^*}{d\theta} > 0$，货币并非是超中性的。货币超中性和非超中性的政策含义：货币政策是宏观政策的基本上手段，超中性意味着货币政策并不会影响实际变量，这是因为模型中货币仅仅进入效用函数（偏好）而非进入生产函数，这就不影响生产从而不影响实际变量，要想货币避免超中性问题就需要引入更多的设定来处理。正是超中性的问题存在，所以后续文献针对打破超中性进行了大量研究。

在引入货币政策的 *Ramsey Model* 中可以导出两个基本结论：一是货币供应与通胀关系（名义经济），二是货币供应与实际经济关系。进一步可以确定：$\frac{dm^*}{d\theta}$。

3.7.3 最优货币政策

最优货币政策（最优 θ）：借鉴黄金率的概念我们寻找最优的货币政策，即最大化居民消费（最优福利），可以得到

$$W^* = \int u(c^*, m^*)e^{-\beta t}dt = \frac{u(c^*., m^*)}{\beta} = \frac{u(c^*) + v(m^*)}{\beta} \tag{3.209}$$

最优性条件满足

$$max_\theta W^* \to u'(c^*)\frac{dc^*}{d\theta} + v'(m^*)\frac{dm^*}{d\theta} = v'(m^*)\frac{dm^*}{d\theta} = 0 \to v'(m^*) = 0 \tag{3.210}$$

这意味着最优货币政策满足货币的边际效用等于 0，即货币发行不需要成本，最优情况下一定是边际效用等于 0，货币增加不影响居民福利。或者说 $v'(m^*) = 0 \to m^* \to \infty$，即实际货币趋向于无穷大，怎么做到呢？注意到 $m = \frac{M}{PL}$，m 趋向于无穷大一定有 P 趋向于 0，如何才能保证价格水平趋向于 0 呢？考虑到

$$v'(m) = u'(c)(\pi + f'(k)) = 0 \to f'(k) + \pi = i = 0 \tag{3.211}$$

这意味着经济中实际利率和通胀之和等于 0，即**最优货币政策满足名义利率 i 等于 0（弗里德曼法则）**。进一步利用均衡点条件得到

$$f'(k)+\pi = n+\beta+\theta-n = \beta+\theta = 0 \tag{3.212}$$

即最优货币政策 θ 一定与贴现因子的相反数 $-\beta$。

接下来我们给出一种货币超中性被打破的模型设定：给定 *Tobin* 的处理，即货币直接进入生产函数

$$f(k,m) = (1-\phi(m))f(k), \phi'(m) < 0 \tag{3.213}$$

其经济含义在于货币的存在可以提高生产效率。相应的，*Ramsey Model* 中消费者行为不发生改变，只需要调整厂商行为，最优化给定为

$$r = f_k(k,m) = (1-\phi(m))f'(k), w = f(k,m) - kf_k(k,m) = (1-\phi(m))[f(k)-kf'(k)] \tag{3.214}$$

继续给出上述情况下的 (c,k,m,π) 的动力系统（三个微分方程外加一个代数方程），讨论 θ 对于经济的影响，此时不存在超中性，货币对生产有影响，自然会影响实体经济，超中性就被打破。但是这种改变是一贯的 *ad-hoc* 设定形式，过于简单和直接。

3.7.4 生产函数中引入货币以打破超中性

家庭部门的优化问题给定为

$$\begin{aligned} max_{c,k,m} & \int_0^\infty u(c,m)e^{-\beta t}dt \\ & s.t\ \dot{k}+\dot{m} = (r-n)k+w+x-(\pi+n)m \end{aligned}$$

家庭部门关于消费、资本存量与货币的三维动力系统表示为：

$$\begin{aligned} \dot{c} &= -\frac{u_c'(c,m)}{u_{cc}''(c,m)}(r-n-\beta) \\ \dot{k}+\dot{m} &= (r-n)k+w+x-c-(\pi+n)m \\ u_m'(c,m) &= u_c'(c,m)(r+\pi) \end{aligned}$$

给定如下初始条件和终止条件：

$$k(0)=k_0;\ \lim e^{-\beta t}u_c'(c,m)(k(t)+m(t))=0;\ u_c(c(0),m(0))=0 \tag{3.215}$$

厂商部门的一阶条件给定为

$$r = (1-\phi(m))f'(k), w = (1-\phi(m))[f(k)-kf'(k)]$$

其中 $0<\phi(m)<1, \phi'(m)<0$。政府部门的货币政策表示为

$$\frac{\dot{M}}{M} = \theta$$

定义人均化货币需求 $m=\frac{M}{PL}$，相应的可以得到

$$\frac{\dot{m}}{m} = (\theta-n-\pi)$$

给定政府的预算平衡方程

$$\frac{\dot{M}}{P} = X \rightarrow x = \frac{\dot{M}}{M}\frac{M}{PL} = \theta m$$

根据上述条件可以得到一般均衡下的动力系统表示为：

$$\begin{aligned}
\dot{c} &= -\frac{u_c'(c,m)}{u_{cc}''(c,m)}((1-\phi(m))f'(k)-n-\beta) \\
\dot{k} &= (1-\phi(m))f(k)-nk-c \\
u_m'(c,m) &= u_c'(c,m)(\pi+(1-\phi(m))f'(k)) \\
\dot{m} &= (\theta-n-\pi)m
\end{aligned}$$

给定如下初始条件和终止条件：

$$k(0)=k_0;\ \lim e^{-\beta t}u_c'(c,m)(k(t)+m(t))=0;\ u_c(c(0),m(0))=0 \tag{3.216}$$

由于内生变量个数等于方程总数，微分方程个数等于条件个数，因此方程存在唯一解。均衡点表示为

$$\begin{aligned}
&(1-\phi(m^*))f'(k^*)-n-\beta=0 \\
&(1-\phi(m^*))f(k^*)-nk^*-c^*=0 \\
&\theta-n-\pi=0
\end{aligned}$$

其中 $\frac{\partial\pi^*}{\partial\theta}=1$，表明通胀与货币政策一一对应。考察货币政策 θ 对于经济的影响，令 $dn=d\beta=0$，全微分得到：

$$\begin{aligned}
\beta dk-\phi'(m)f(k)dm-dc&=0 \\
(1-\phi(m))f''(k)dk-\phi'(m)f'(k)dm&=0 \\
u_{mm}''(c,m)dm=u_{cc}''(c,m)(\pi+n+\beta)dc+u_c'(c,m)&[d\theta+(1-\phi(m))f''(k)dk-\phi'(m)f'(k)dm]
\end{aligned}$$

该线性方程组可以表示为

$$\begin{bmatrix} \beta & -\phi'(m)f(k) & -1 \\ (1-\phi(m))f''(k) & -\phi'(m)f'(k) & 0 \\ u_c'(c,m)(1-\phi(m))f''(k) & -[u_c'(c,m)\phi'(m)f'(k)+u_{mm}''(c,m)] & u_{cc}''(c,m)(\pi+n+\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dk^*}{d\theta} \\ \frac{dm^*}{d\theta} \\ \frac{dc^*}{d\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -u_c'(c,m) \end{bmatrix}$$

给定上述决定方程，如果分子不为 *0*，则货币并非是超中性的，货币政策会影响实际人均资本存量、人均消费与人均货币需求。

3.7.5 引入货币政策 *Ramsey Model* 数学形式

Government:

$$\text{Revenue}\left\{\begin{array}{l}\text{Tax: } T(T=0) \\ \text{Seigniorage: } \dot{M}\end{array}\right. = \text{Expenditure}\left\{\begin{array}{l}\text{Fiscal expenditure: } G \\ \text{Transfer payment: } X\end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{\dot{M}}{P}=G+X \Rightarrow \frac{\dot{M}}{M}\frac{M}{PL}=\frac{G}{L}+\frac{X}{L} \Rightarrow \theta m=g+x \\
&\Rightarrow m=\frac{M}{PL} \Rightarrow \frac{\dot{m}}{m}=\frac{\dot{M}}{M}-\frac{\dot{P}}{P}-\frac{\dot{L}}{L} \Rightarrow \dot{m}=m(\theta-\pi-n)
\end{aligned}$$

Firm:

$$\max_{K,L} F(K,L)-rK-wL \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} r=f'(k) \\ w=f(k)-f'(k)k \end{array}\right.$$

Consumer:

$$A=K+\frac{M}{P}\Rightarrow\begin{cases}\textit{Tobin: } \dot{A}=\dot{K}+(\dot{\frac{M}{P}})=rK+wL-\pi\frac{M}{P}+X-C\\ \textit{Sidrauski: } \dot{A}=\dot{K}+\dot{\frac{M}{P}}=rK+wL+X-C\end{cases}$$

$$\Rightarrow\dot{k}+\dot{m}=\frac{\dot{K}}{L}-k\frac{\dot{L}}{L}+\frac{\dot{M}}{PL}-\frac{M(\dot{P}L+P\dot{L})}{(PL)^2}=rk+w+x-c-nk-m(n+\pi)$$

$$\begin{array}{l}\max\int_0^{+\infty}u(C,\frac{M}{P})e^{-\rho t}dt\\ \text{s.t. } \dot{K}+\dot{\frac{M}{P}}=rK+wL+X-C\end{array}\Rightarrow\begin{array}{l}\max\int_0^{+\infty}u(c,m)e^{-\beta t}dt\\ \text{s.t. } \dot{k}+\dot{m}=rk+w+x-c-nk-m(n+\pi)\end{array}$$

$$\max\int_0^{+\infty}(u(c)+\gamma v(m))e^{-\beta t}dt$$

$$\text{s.t. } \dot{k}+\dot{m}=rk+w+x-c-nk-m(n+\pi)$$

$$a\equiv k+m\Rightarrow\dot{a}=\dot{k}+\dot{m}$$

$$\max\int_0^{+\infty}(u(c)+\gamma v(m))e^{-\beta t}dt$$

$$\text{s.t.}\quad\begin{array}{l}\dot{a}=rk+w+x-c-nk-m(n+\pi)\\ a=k+m\end{array}$$

$$H=(u(c)+\gamma v(m))e^{-\beta t}+\lambda(rk+w+x-c-nk-m(n+\pi))+\mu(a-k-m)$$

$$\begin{cases}(1)\quad\begin{array}{l}\frac{\partial H}{\partial c}=u'(c)e^{-\beta t}-\lambda\\ \frac{\partial H}{\partial k}=\lambda(r-n)-\mu\\ \frac{\partial H}{\partial m}=\gamma v'(m)e^{-\beta t}-\lambda(\pi+n)-\mu\end{array}\quad\Rightarrow\begin{array}{l}\begin{cases}\lambda=u'(c)e^{-\beta t}\\ \dot{\lambda}=u''(c)e^{-\beta t}\dot{c}-\beta u'(c)e^{-\beta t}\end{cases}\\ \gamma v'(m)=u'(c)(\pi+r)\end{array}\\ (2)\ \dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial a}=-\mu=-\lambda(r-n)\Rightarrow\dot{c}=\dot{c}=-\frac{u'(c)}{u''(c)}(r-n-\beta)\\ (3)\ \dot{a}=rk+w+x-c-nk-m(n+\pi)\\ (4)\ \text{TVC: } \lim_{T\to\infty}a(T)\lambda(T)=0\end{cases}$$

Equilibrium:

$$\begin{cases}\dot{k}+\dot{m}=rk+w+x-c-nk-m(n+\pi)\\ \dot{m}=m(\theta-\pi-n)\\ \dot{c}=-\frac{u'(c)}{u''(c)}(r-n-\beta)\\ \gamma v'(m)=u'(c)(r+\pi)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dot{k}=f(k)-nk-c-g\\ \dot{m}=m(\theta-\pi-n)\\ \dot{c}=-\frac{u'(c)}{u''(c)}(f'(k)-n-\beta)\\ \gamma v'(m)=u'(c)(f'(k)+\pi)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(k^*)-nk^*-c^*-g=0\\ \theta-\pi^*-n=0\\ f'(k^*)-n-\beta=0\\ \gamma v'(m^*)=u'(c^*)(f'(k^*)+\pi^*)\end{cases}$$

3.8 拓展形式的 *Ramsey Model*

对 *Ramsey Model* 的改进：*kurz(1968IER)* 将财富效应引入效用函数

$$max\int u(c,k)e^{-\beta t}dt \tag{3.217}$$

$$s.t.\ \dot{k}=f(k)-nk-c, k(t_0)=k_0 \tag{3.218}$$

控制变量 c_t，状态变量 k_t，重新求解改进后的 *Ramsey Model* 得到：定义 *Hamilton* 函数

$$H=u(c,k)e^{-\beta t}+\lambda[f(k)-nk-c] \tag{3.219}$$

根据极大值原理导出

$$\frac{\partial H}{\partial c}=u'(c_t)e^{-\beta t}-\lambda=0 \tag{3.220}$$

$$\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial k}=--u'_k(c,k)e^{-\beta t}-\lambda[f'(k)-n] \tag{3.221}$$

化简得到

$$\dot{c} = -\frac{u'(c)}{u''(c)}[f'(k) - n - \beta + \gamma\frac{v'(k)}{u'(c)}] \tag{3.222}$$

其中假定效用函数等于 $u(c,k) = u(c) + \gamma v(k)$。均衡点表示为

$$f'(k) - n - \beta + \gamma\frac{v'(k)}{u'(c)} = 0 \tag{3.223}$$

$$\rightarrow f'(k*_{kurz}) = n + \beta - \gamma\frac{v'(k)}{u'(c)} < n + \beta = f'(k^*_{ramsey}) \tag{3.224}$$

$$f(k) - nk - c = 0 \tag{3.225}$$

修正的黄金法则表示为 $f'(k) + \gamma\frac{v'(k)}{u'(c)} = n + \beta$，即资本存量增加的边际生产率等于调整后的人口增长率，这表明在引入财富效应之后的稳态资本存量 k^*_{kurz} 大于标准 *Ramsey Model* 中的资本存量 k^*_{ramsey}。此外，将财富效应引入效用函数之后，根据不同效用函数形式可以得到多重均衡，从而解释增长的差异性等。在该框架下重新考察财政货币政策，可以证明 $\frac{dk^*}{dg} > 0, \frac{dk^*}{d\theta} \neq 0$，即财政支出不再是无效的，货币政策不再是超中性的。

将贴现因子 β 从常数向非常数推广：*Uzawa*（*1968*）将偏好中的贴现因子处理为 $\beta(u(c))$，即贴现取决于私人效用；*Becker(1997 QJE)* 将产品消费区分为影响效用的消费 c 和影响消费看法的消费 e，此时贴现与消费看法相关 $\beta = \beta(e)$。

4 内生增长理论

Romer(1986,1990 JPE)、*Lucas(1988JME)* 首先将技术进步内生化从而建立内生增长模型，将传统的 *Ramsey Model* 中新古典技术向内生技术进步模式转换，从而解释长期人均经济增长状况。

回到 *Solow* 模型中资本积累动态给定为 $\dot{k} = sf(k) - nk$，我们考察不同技术类型的影响。考虑规模报酬不变的生产函数 $f(k) = Ak$（A 为常数），增长率关系表示为

$$\gamma_k = \frac{\dot{k}}{k} = \gamma_y = \gamma_c = sA - n \tag{4.1}$$

若 $sA - n > 0$ 必然导致人均经济的长期增长，上述模型是经典的 AK 模型。

定义平衡增长路径（*BGP*）：内生变量（在无穷远处）的增长率为常数，即在 AK 模型中表示为 $\gamma_k = \gamma_y = \gamma_c = sA - n$；在平衡增长路径上，内生变量增长率均大于 0，即 $\gamma_k^*, \gamma_y^*, \gamma_c^*$ 均大于 0，$sA > n$，此时平衡增长路径上存在长期经济增长，称之为内生增长。注意到，为什么这里出现了内生增长而传统模型中均为外生增长？这是因为 AK 技术在现实中并不存在，但是存在内生机制促使技术呈现出规模报酬不变的形式，这种内在的机制就是内生增长的关键。这实际上给出了处理内生增长问题的框架：在不存在内生增长的模型中我们利用动力系统考察均衡点，均衡点增长率均为 0；但是对于存在内生增长的情况，均衡增长率为正，需要更换研究工具，我们这里定义 BGP 以及增长率分析，利用增长率的常数关系考察内生经济增长。

Arrow(1961) 首先给出了干中学（*learning by doing*）的机制。对于经济中的每个企业均有 CD 形式的生产函数，即 $Y_j = AK_j^{\alpha} L_j^{1-\alpha}$，其中 $A = A_0(\frac{\sum^N k_j}{N})^{\eta}$，这里表示技术进步是经济总规模的函数。均衡情况下，所有企业是一致的，即 $k_j = k$，假设经济中劳动均衡为 $L_j = L = 1$，从而得到

$$Y = A_0 K^{\eta} K^{\alpha} = A_0 K^{\alpha+\eta} \tag{4.2}$$

注意到如果 $\alpha + \eta = 1$，此时转化为 AK 技术。因此，内生增长的技术一定是 AK 类型（包括 AK 以及 AK 叠加新古典生产函数）的技术，关键的在于给出形成 AK 技术的内生机制，换言之，内生增长的关键是给出导致 AK 技术型的内在机制。

4.1 *BGP* 平衡增长路径

4.1.1 *BGP*: *Solow Model*

在新古典生产函数下，我们需要讨论均衡点，以及均衡点存在性、唯一性和稳定性，在此基础上利用均衡点进行比较静态分析；在 AK 技术中，我们需要讨论 BGP，以及 BGP 的存在性、唯一性和稳定性，在 BGP 的基础上进行比较静态分析，即外生参数改变对于平衡增长路径 $\gamma_k^*, \gamma_y^*, \gamma_c^*$ 的影响。在 AK 技术中，存在性和唯一性均是显然的。我们在本节的最后给出稳定性的讨论。注意到，平衡增长路径是定义在无穷远处的，因此需要考察无穷远处的性质，例如 $k \to \infty$。

下面我们讨论更加一般化的 AK 型技术进步，给定 $f(k) = Ak + Bk^{\alpha}, \alpha \in (0,1)$：在 *Solow* 模型中考察

$$\dot{k} = s(Ak + Bk^{\alpha}) - nk \tag{4.3}$$

其中均衡点一定是不稳定的，我们使用 *BGP* 来处理，此时该函数在无穷远处时 CD 技术不影响生产函数，因而退化为 AK 技术。可以得到

$$\gamma_k = s(Ak + Bk^{\alpha-1}) - n, \gamma_y = \frac{A + B\alpha k^{\alpha-1}}{A + Bk^{\alpha-1}} \gamma_k, \gamma_c = \gamma_y \tag{4.4}$$

其中 $c = (1-s)y, s$ 为常数，因而 $\gamma_c = \gamma_y$。上述给出了整条路径上的增长率，下面考察 BGP：令增长率 $\gamma_k^*, \gamma_y^*, \gamma_c^*$ 为常数[40]，必然有 $Bk^{\alpha-1}$ 等于常数。内生增长进一步要求 $\gamma_k^* > 0$，此时有 $\lim_{\infty} Bk^{\alpha-1} = 0$，

[40]注意到，$\gamma_k^* = \gamma_y^*$ 不是假定的而是推导得出的！不能预设。

因此可以得到内生增长下的 BGP：

$$\gamma_k^* = \gamma_y^* = \gamma_c^* = sA - n > 0 \tag{4.5}$$

比较静态分析可以得到

$$\frac{\partial \gamma_y^*}{\partial s} > 0, \frac{\partial \gamma_y^*}{\partial A} > 0, \frac{\partial \gamma_y^*}{\partial n} < 0, \tag{4.6}$$

对于最一般的生产函数 $y = f(k)$，出现内生增长的条件是什么？重新考察 Solow 模型，增长率表示为

$$\gamma_k = sf(k)k - n, \gamma_y = \frac{f'(k)k}{f(k)}\gamma_k, \gamma_c = \gamma_y \tag{4.7}$$

要想出现内生增长，首先需要满足平衡增长路径，即增长率为常数 $\gamma_k^*, \gamma_y^*, \gamma_c^*$ 均为常数，γ_k^* 意味着 $(\frac{f(k)}{k})^*$ 为常数，γ_y^* 为常数意味着 $(f'(k))^*$ 为常数；这意味着无穷远处存在

$$\lim_{\infty} f(k)/k = cons., \lim_{\infty} f'(k) = cons. \tag{4.8}$$

定义 $\lim_{\infty} f(k)/k = A$，相应的 $\lim_{\infty} f'(k) = A$。如果出现内生增长，必然意味着：

1. $\lim_{\infty} f'(k) = A$ 为常数；
2. $\gamma_k^* = \gamma_y^* = \gamma_c^* = sA - n$；

因此对于内生增长而言，意味着在无穷远处满足 AK 技术且 $sA > n$，其中 A 表示在无穷远处资本的边际生产率。因此生产函数必然满足

$$f(k) = Ak + g(k) \tag{4.9}$$

其中 $g(k)$ 为新古典生产函数，无穷远处 $\lim_{\infty} g'(k) = 0$，不影响 AK 技术类型，上述函数统称为 AK 型生产函数。

4.1.2 *BGP*：*Ramsey Model*

给定中央计划者的 *Ramsey Model*，最优解表示为

$$\dot{c} = -\frac{u'(c)}{u''(c)}[f'(k) - n - \beta] \tag{4.10}$$

$$\dot{k} = f(k) - nk - c \tag{4.11}$$

假定 $f(k) = Ak$, 效用函数是 $u(c) = \frac{c^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}$，求解上述微分方程：

$$\dot{c}/c = \frac{1}{\gamma}(A - n - \beta) \tag{4.12}$$

$$\dot{k} = Ak - nk - c \tag{4.13}$$

$$\lim u'(c_t)k_t e^{-\beta t} = 0 \tag{4.14}$$

如果 $A - n - \beta \neq 0$，动力系统不存在均衡点；如果 $A - n - \beta = 0$，即消费增长率为 0，消费不进行调整（没有动态）。考察平衡增长路径，首先求解增长率：

$$\gamma_c = \frac{1}{\gamma}(A - n - \beta), \gamma_k = A - n - \frac{c}{k} \tag{4.15}$$

平衡增长路径给定为

$$\gamma_c^* = cons., \gamma_k^* = cons. \rightarrow (c/k)^* = cons. \rightarrow \gamma_c^* = \gamma_k^* \tag{4.16}$$

这意味着 $\gamma_c^*=\gamma_y^*=\gamma_k^*=\frac{1}{\gamma}(A-n-\beta)$。相应的，$\frac{c}{k}=(A-n)-\frac{1}{\gamma}(A-n-\beta)$。内生增长情况下要求 $A>n+\beta$。在 *Ramsey Model* 中我们不仅给出了经济增长路径，还需要给出最优的消费增长路径 $\frac{c}{k}>0$，而这本身是由 *TVC* 所决定的。因此在 *Ramsey Model* 中内生增长满足

1. 内生增长条件：$\gamma_k^*=\gamma_y^*=\gamma_c^*=\frac{1}{\gamma}(A-n-\beta)>0$;
2. TVC 条件：$\frac{c}{k}=(A-n)-\frac{1}{\gamma}(A-n-\beta)$;

在 *Ramsey Model* 中，如果生产函数是新古典生产函数，则需要讨论均衡点，以及均衡点的存在性、唯一性和稳定性，并据此考察比较静态；如果生产函数是 AK 型技术进步，则需要讨论 BGP，以及 BGP 的存在性、唯一性和稳定性，并根据 BGP 进行比较静态分析[41]。

假定 $f(k)=Ak+Bk^\alpha$，考察平衡增长路径：增长率给定为

$$\gamma_c=\frac{1}{\gamma}[A+B\alpha k^{\alpha-1}-n-\beta] \tag{4.17}$$

$$\gamma_k=A+Bk^{\alpha-1}-n-\frac{c}{k} \tag{4.18}$$

$$\gamma_y=\frac{A+B\alpha k^{\alpha-1}}{A+Bk^{\alpha-1}}\gamma_k \tag{4.19}$$

平衡增长路径满足增长率为常数，意味着 $\alpha Bk^{\alpha-1}$ 等于常数，$(c/k)^*$ 等于常数，这意味这 $\gamma_c^*=\gamma_k^*$（推导得出）。要想出现内生增长，必然满足

$$\gamma_c^*=\gamma_k^*>0,\gamma_y^*>0 \tag{4.20}$$

尚未证明 $\gamma_k^*=\gamma_y^*$，因此 $\lim\alpha Bk^{\alpha-1}=0$，此时满足如下均衡条件

1. 内生增长条件：$\gamma_k^*=\gamma_y^*=\gamma_c^*=\frac{1}{\gamma}(A-n-\beta)>0$;
2. TVC 条件：$\frac{c}{k}=(A-n)-\frac{1}{\gamma}(A-n-\beta)$;

4.1.3 *BGP* 稳定性

Mulligan and Sala-i-Martin(1992 QJE)[42]详细讨论了平衡增长路径的稳定性问题。BGP 稳定性讨论面临的基本的问题是：无穷远点出不能直接线性展开为动力系统，此时利用 *Poincaré* 变换[43]将无穷远处映射到有限点处进行讨论。引入 $x=\frac{y}{k}=A+Bk^{\alpha-1},q=\frac{c}{k}$，平衡增长路径上 $Bk^{\alpha-1}$ 为常数，因而 q,x 在平衡路径上均为常数。此时转换为 (q,x) 系统进行讨论：

$$q=c/k\rightarrow\frac{\dot q}{q}=\frac{\dot c}{c}-\frac{\dot k}{k}=\frac{1}{\gamma}[A+B\alpha k^{\alpha-1}-n-\beta]-[A+Bk^{\alpha-1}-n-\frac{c}{k}] \tag{4.21}$$

$$=\frac{1}{\gamma}[A+\alpha(x-A)-n-\beta]-(x-n-q) \tag{4.22}$$

$$x=\frac{y}{k}\rightarrow\dot x=\frac{\dot y}{y}-\frac{\dot k}{k}=(\alpha-1)(x-A)(x-n-q) \tag{4.23}$$

对于 (q,x) 系统我们可以讨论均衡点及其存在性、唯一性和稳定性。因此 BGP 的存在性、唯一性与稳定性完全转化为 (q,x) 均衡点的存在性、唯一性与稳定性问题。注意到，动力系统中存在两个均衡点，可以通过如下两种方式确定：一是给定 x 的定义关系确定，二是求解两个均衡解，分别在均衡解附近线性化展开，一般情况下可以证明一个均衡解是稳定的，另一个均衡解是不稳定的，后续分析针对稳定均衡解即可。

[41]习题：考察 A,n,β,γ 对于 $\gamma_k^*,\gamma_y^*,\gamma_c^*,(c/k)^*$ 的影响。

[42]Casey B. Mulligan, Xavier Sala-i-Martin, Transitional Dynamics in Two-Sector Models of Endogenous Growth, *The Quarterly Journal of Economics*, Volume 108, Issue 3, August 1993, Pages 739–773.

[43]*Poincaré* 变化为有限问题进行处理。注意到，*Poincaré* 存在无穷多种形式，需要根据模型给出具有经济学含义的变换形式。

proof：定义参数 $\phi = (A-n) - \frac{A-n-\beta}{\sigma} > 0$，均衡点给定为

$$\dot{q}^* = 0 \rightarrow \frac{A + \alpha(x^* - A) - n - \beta}{\sigma} = x^* - n - q^*$$
$$\dot{x}^* = 0 \rightarrow (\alpha - 1)(x^* - A)(x^* - n - q^*) = 0$$

考虑到 $x = A + Bk^{\alpha-1} \geq A$，因而 $A + \alpha(x^* - A) - n - \beta > 0$，从而 $x^* - n - q^* \neq 0$，相应存在唯一的均衡点满足 $x^* = A, q^* = \phi$。下面证明该均衡点的稳定性：二维动力系统在均衡点附近线性化展开得到

$$\dot{q} = q^*(q - q^*) + (\frac{\alpha - \sigma}{\sigma} q^*)(x - x^*)$$
$$\dot{x} = (\alpha - 1)(x^* - n - q^*)(x - x^*)$$
$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q^* & \frac{\alpha-\sigma}{\sigma} \\ 0 & (\alpha - 1)(x^* - n - q^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q - q^* \\ x - x^* \end{bmatrix}$$

假定线性化系数矩阵特征根为 λ_1, λ_2，注意到 $x^* - n - q^* = \frac{A-n-\beta}{\sigma} > 0$，相应的 $\lambda_1\lambda_2 = (\alpha-1)q^*(x^* - n - q^*) < 0, \lambda_1 + \lambda_2 > 0$，此时存在 $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$，该均衡点是鞍点稳定的。

Case：在 $f(k) = Ak$ 情况下 *BGP* 的存在性、唯一性和稳定性

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\gamma}[A - n - \beta], \dot{k} = Ak - nk - c \tag{4.24}$$

Case：*Solow* 模型中 $f(k) = Ak + Bk^{\alpha-1}$，讨论 *BGP* 的存在性、唯一性和稳定性

$$\dot{k} = s(Ak + Bk^{\alpha}) - nk \tag{4.25}$$

定义 *Poincaré* 变换 $x = \frac{y}{k} = A + Bk^{\alpha-1}$。相应的可以得到

$$\dot{x} = (\alpha - 1)(sx - n)(x - A)$$

均衡点表示为 $\dot{x} = 0$，均衡点时满足 $x^* = A, \gamma_k^* = sx^* - n > 0$[44]，动力系统在该均衡点处线性展开得到

$$\dot{x} = (\alpha-1)(sx^* - n)(x^* - A) + (\alpha - 1)[s(x^* - A) + (sx^* - n)](x - x^*) = (\alpha - 1)(sx^* - n)(x - x^*)$$

由于 $(\alpha - 1) < 0$，因此该均衡点是稳定的，相应的，该问题对应的平衡增长路径是稳定的。

4.1.4 内生经济增长的不定性

Behanbib (1994 JET)[45]、*Xie Danyang(1994JET)*[46]讨论内生经济增长中的不定性（*Indeterminacy*），这包括两种情况：一是存在不同的稳态增长路径，这意味着不同国家会收敛到不同的经济增长率从而实现了国家间的比较收敛；二是存在不同的从非均衡到均衡的转移动态，这意味着尽管稳态增长率相似，但是收敛到稳态增长路径中的经济表现存在差异性。*Lucas(2000JEP)*[47]指出尽管所有国家都会收敛到单一稳态增长率，但是不同时间不同国家的增长状态且完全不同，即使同一时刻不同国家的增长状态也存在差异。

[44]注意，在这里还存在另一个均衡解 $x = s/n$，即可以通过 x 的定义关系排除，也可以通过在 $x = s/n$ 附近线性化展开的不稳定性排除，最后保留稳定的均衡解 $x = A$。

[45]Benhabib, J., & Farmer, R. E. A. (1994). Indeterminacy and increasing returns. *Journal of Economic Theory*, 63(1), 19-41.

[46]Danyang Xie, (1994), Divergence in Economic Performance: Transitional Dynamics with Multiple Equilibria, *Journal of Economic Theory.*, 63, (1), 97-112

[47]Lucas, Robert, E. 2000. "Some Macroeconomics for the 21st Century." *Journal of Economic Perspectives*, 14 (1): 159-168.

4.2 内生增长的机制

4.2.1 *Human Capital*

Uzawa(1968)、*Lucas(1988)* 先后提出人力资本的两部门内生增长理论。假定经济中存在两类资本：物质资本 K 和人力资本 H，企业生产函数假定为

$$Y = AK^{\alpha}H^{1-\alpha} \tag{4.26}$$

企业利润最大化条件表示为

$$\frac{H}{K} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{R_K}{R_H} \tag{4.27}$$

如果经济中存在两类资本,则两类资本收益率必然相等,否则会引致套利行为,因而均衡状态满足 $K/H = \alpha/(1-\alpha)$，即经济中的资本等于其在生产函数中的相对份额。此时 $H = \frac{1-\alpha}{\alpha}K$，代入生产函数得到

$$Y = A(\frac{1-\alpha}{\alpha})^{1-\alpha}K = \bar{A}K \tag{4.28}$$

因此两部门人力资本模型给出了 AK 生产函数。

4.2.2 内生技术进步

Romer(1986,1990,JPE) 将中间品生产引入经济增长框架；假定最终品生产满足

$$Y = L^{1-\alpha}\int_0^A x_i^{\alpha}di \tag{4.29}$$

其中 x_i 表示中间品，A 表示中间品个数，经济中的资本等于所有中间品加总：$K = \int_0^A x_i di$。均衡状态下，$x_i = x$，相应的生产函数满足

$$Y = L^{1-\alpha}Ax^{\alpha} = A^{1-\alpha}L^{1-\alpha}K^{\alpha} = L^{1-\alpha}(A/K)^{1-\alpha}K \tag{4.30}$$

其中 A 不再是技术而是中间品，中间品按照 $\dot{A}/A = \delta L_A$ 的速度增长，稳态增长满足 (A/K) 为常数，因而保证生产函数满足 AK 函数。

4.2.3 政府行为外部性

Barro(1990JPE) 将政府行为纳入政府框架，企业生产函数满足

$$f(k,g) = Ak^{\alpha}g^{1-\alpha} \tag{4.31}$$

其中政府部门支出来自于税收

$$g = \tau f(k,g) = \tau k^{\alpha}g^{1-\alpha} \tag{4.32}$$

将其代入生产函数可以得到

$$f(k,g) = Ak(\frac{1}{\tau A})^{(1-\alpha)/\alpha} = \bar{A}k \tag{4.33}$$

保证了生产函数满足 AK 函数。

内生增长理论的实质就是：寻找内生机制保证生产函数满足 AK 或 AK 型，因而内生增长的关键就是寻找内在机制去创造 AK 型技术。

4.3 *Human Capital Model*

考虑 *Uzawa* 的人力资本模型[48]。假定经济中存在两类资本：物质资本 K 和人力资本 H，储蓄用来增加两类资本

$$\dot{K} = s_K F(K,H) - \delta_K K \tag{4.34}$$
$$\dot{H} = s_H F(K,H) - \delta_H H \tag{4.35}$$

其中 s_K, s_H 分别表示两种资本的储蓄率。假定生产函数满足 $Y = AK^{\alpha}H^{1-\alpha}$，人均化得到

$$\dot{k} = s_K A k^{\alpha} h^{1-\alpha} - (n+\delta_K)k \tag{4.36}$$
$$\dot{h} = s_H A k^{\alpha} h^{1-\alpha} - (n+\delta_H)h \tag{4.37}$$

利用动力系统讨论该微分方程组的均衡点的存在性、唯一性和稳定性。

考察人力资本模型下的平衡增长路径，增长率给定为

$$\gamma_k = s_K A(k/h)^{\alpha-1} - (n+\delta_K) \tag{4.38}$$
$$\gamma_h = s_H A(k/h)^{\alpha} - (n+\delta_H) \tag{4.39}$$

平衡增长路径上面满足 $\gamma_k^*, \gamma^* h$ 等于常数，这意味着 $(k/h)^*$ 等于常数，$\gamma_k^* = \gamma^* h$，即平衡增长路径上两种资本的增长率相等；人均化的增长率为常数意味着

$$\gamma_k^* = \gamma_h^* = s_K A(k/h)^{\alpha-1} - (n+\delta_K) \tag{4.40}$$
$$A(k/h)^{\alpha} = \frac{\gamma_k^* + (n-\delta_H)}{S_H} \tag{4.41}$$

内生增长要求 $\gamma_k^* = \gamma^* h > 0$，得到

$$\gamma_k^* = s_K A\left(\frac{\gamma_k^* + (n+\delta_H)}{s_H A}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - (n+\delta_K) > 0 \tag{4.42}$$

稳态时可以得到 $\frac{k}{h}$ 为常数，此时生产函数满足 AK 技术。

为了得到显式的稳态增长路径，假定两种资本折旧相等 $\delta_K = \delta_H = \delta$，内生增长满足

$$\gamma_k^* = \gamma_h^* = A s_K^{\alpha} s_H^{1-\alpha} - (n+\delta) > 0 \tag{4.43}$$
$$\left(\frac{k}{h}\right)^* = \left(\frac{\gamma_k^* + (n+\delta)}{s_H A}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{4.44}$$

决定国家经济增长的因素表示为 $\phi(s_K, s_H, n, \delta, \alpha, A)$，其中人力资本与物质资本的储蓄率 s_K, s_H 显著影响稳态增长路径下的增长率，这意味着国家重视积累人力资本还是重视积累物质资本会显著影响国家的增长绩效。

4.4 政府支出外部性

Barro(1990JPE)[49]将政府支出引入增长框架，给出了政府支出外部性层面的增长解释。

[48]Mankiw NG, Romer D, Weil D. A Contribution to the Empirics of Economic Growth. *Quarterly Journal of Economics.* 1992;107 (May) :407-437.(注：龚六堂认为这是曼昆最重要的一篇文章，没有之一。)

[49]Barro, Robert J. 1990. Government spending in a simple model of endogeneous growth. *Journal of Political Economy* 98(S5): 103-125.

4.4.1 政府支出外部性下的内生增长

考察分散经济的 *Ramsey Model*：对于消费者而言存在

$$max_{c,a} \int u(c)e^{\beta t}dt \tag{4.45}$$

$$s.t.\ \dot{a} = (1-\tau)(ra+w) - na - c,\ a(0) = a_0 \tag{4.46}$$

最优化条件满足

$$\dot{c} = -\frac{u'(c)}{u''(c)}((1-\tau)r - n - \beta) \tag{4.47}$$

$$\dot{a} = (1-\tau)(ra+w) - na - c \tag{4.48}$$

$$TVC:\ \lim u'(c)ae^{-\beta t} = 0 \tag{4.49}$$

厂商行为：假定企业生产函数满足 $f(k,g)$，满足 $f_{kg} > 0$，企业最优化表示为

$$max_{k,L}\ L(f(k,g) - rk - w) \tag{4.50}$$

最优化条件满足

$$r = \frac{\partial F}{\partial K} = f_k(k,g) \tag{4.51}$$

$$w = \frac{\partial F}{\partial L} = f(k,g) - kf_k(k,g) \tag{4.52}$$

对于政府而言满足预算平衡

$$\tau(ra+w) = g \tag{4.53}$$

市场出清满足

$$\dot{c} = -\frac{u'(c)}{u''(c)}[(1-\tau)f_k(k,g) - n - \beta] \tag{4.54}$$

$$\dot{k} = f(k,g) - nk - c - g \tag{4.55}$$

$$TVC: \lim u'(c)ke^{-\beta t} = 0 \tag{4.56}$$

$$g = \tau f(k,g) \tag{4.57}$$

假定效用函数满足 $u(c) = \frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}$，生产函数满足 $f(k,g) = Ak^{\alpha}g^{1-\alpha}$，代入化简得到

$$\dot{c}/c = \frac{1}{\sigma}[(1-\tau)f_k(k,g) - n - \beta] \tag{4.58}$$

$$\dot{k} = Ak^{\alpha}g^{1-\alpha} - nk - c - g \tag{4.59}$$

$$g = \tau Ak^{\alpha}g^{1-\alpha} \rightarrow (\frac{k}{g}) = (\tau A)^{-\frac{1}{\alpha}} \tag{4.60}$$

内生变量的增长率表示为

$$\gamma_c = \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma}[(1-\tau)\alpha A(\tau A)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - n - \beta] \tag{4.61}$$

$$\gamma_k = Ak^{\alpha-1}g^{1-\alpha} - n - c/k - g/k \tag{4.62}$$

$$g/k = (\tau A)^{1/\alpha} \tag{4.63}$$

平衡增长路径满足 γ_c^*, γ_k^* 等于常数，这意味着 $(\frac{c}{k})^*$ 为常数，$\gamma_c^* = \gamma_k^*$[50]，相应的转化为

$$\gamma_c^* = \gamma_k^* = \frac{1}{\sigma}[(1-\tau)\alpha A(\tau A)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - n - \beta] \tag{4.64}$$

$$(\frac{c}{k})^* = A(\tau A)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - n - (\tau A)^{1/\alpha} - \gamma_k^* \tag{4.65}$$

[50]平衡增长路径只意味着内生变量增长率为常数，而不意味着不同变量稳态增长率相等，需要根据条件推导确定。

内生增长需要满足

$$(1-\tau)\alpha A(\tau A)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - n - \beta > 0 \tag{4.66}$$

同时 TVC 满足

$$A(\tau A)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - n - (\tau A)^{1/\alpha} - \gamma_k^* > 0 \tag{4.67}$$

这意味着 $(c/k)^* > 0$。据此我们给出了平衡增长路径的基本特征：

$$\gamma_c^* = \gamma_k^* = \frac{1}{\sigma}[(1-\tau)\alpha A(\tau A)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - n - \beta] > 0 \tag{4.68}$$

$$(\frac{c}{k})^* = A(\tau A)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - n - (\tau A)^{1/\alpha} - \gamma_k^* > 0 \tag{4.69}$$

讨论平衡增长路径的存在性、唯一性和稳定性。给定平衡增长路径的稳定性，进行比较静态分析。

4.4.2 政府最优收入税率

考察税率 τ 对于经济增长率的影响：$\frac{\partial \gamma_k^*}{\partial \tau}$ 方向不确定，这表明税率对于经济增长的影响是不确定的。最优化增长率

$$max_\tau\ \gamma_c^* \to \tau^* = 1 - \alpha \tag{4.70}$$

这意味着最优税率等于公共支出在生产函数的份额 $(1-\alpha)$，这也就给出了最优的收入税税率。进一步的我们可以讨论最优的政府规模：

$$g = \tau f(k,g) \to \frac{g}{f(k,g)} = \tau^* = 1 - \alpha \tag{4.71}$$

因此政府最优规模给定为 $g^* = (1-\alpha)f(k,g)$。

考察税率 τ 对于社会福利的影响：

$$max_\tau\ W = \int u(c)e^{-\beta t}dt \tag{4.72}$$

其中 $c(t)$ 可以根据最优化条件积分得到，最优化求解得到 $\tau^* = 1-\alpha$，这意味着增长下的最优收入税率与福利最大化的最优收入税率等价[51]。

4.4.3 政府最优支出结构

我们将政府支出拓展为包含多种支出结构：

$$g = g_1 + \cdots + g_n, \sum \phi_i = 1 \tag{4.73}$$

其中 $\phi = g_i/g$ 表示支出类型 i 在总支出中的份额。生产函数给定为

$$f(k, g_1, \ldots, g_n) = Ak^\alpha \Pi g_i^{w_i}, \alpha + \sum w_i = 1 \tag{4.74}$$

平衡增长路径上的增长率满足

$$\gamma_k^* = \Phi(\phi_1, \ldots, \phi_n) \tag{4.75}$$

这意味着平衡增长率是各类支出在总支出的份额，通过最优化增长率可以相应的得到最优政府支出结构。

[51]在特殊的生产函数和效用函数下得到的结论，不具有一般性。

4.4.4 政府支出外部性的数学形式

Government:

- Income Tax: $\tau_r = \tau_w = \tau$
- Government Expenditure:

$$G = \tau(rA + wL) \Rightarrow g = \tau(ra + w)$$

- Production Function: $y = f(k, g) = Ak^{\alpha} g^{1-\alpha}$

Consumer:

$$\begin{aligned}
&\max_{c,a} \int_0^{+\infty} u(c)e^{-\beta t} dt \\
&\text{s.t. } \dot{a} = (1-\tau)(ra + w) - na - c \\
\Rightarrow &\begin{cases} \dot{c} = -\frac{u'(c)}{u''(c)}((1-\tau)r - n - \beta) \\ \dot{a} = (1-\tau)(ra + w) - na - c \end{cases}
\end{aligned}$$

Firm:

$$\begin{aligned}
&\max_{K,L} F(K, L, G) - rK - wL \Rightarrow \begin{cases} r = f_k \\ w = f(k) - f_k k \end{cases} \\
&g = \tau(ra + w) = \tau f(k, g) = \tau A k^{\alpha} g^{1-\alpha} \\
\Rightarrow &g^{\alpha} = \tau A k^{\alpha} \\
\Rightarrow &f(k) = (\tau A)^{\frac{1}{\alpha}} k
\end{aligned}$$

Equilibrium:

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} \dot{c} = -\frac{u'(c)}{u''(c)}((1-\tau)f_k - n - \beta) \\ \dot{a} = (1-\tau)f(k, g) - nk - c \end{cases} \\
&\text{Assume: } u(c) = \frac{C^{1-\delta} - 1}{1-\delta} \\
\Rightarrow_{BGP} &\begin{cases} \gamma_c = \frac{1}{\gamma}((1-\tau)f_k - n - \beta) = \text{const.} \\ \gamma_k = (1-\tau)\frac{f(k,g)}{k} - n - \frac{c}{k} = \text{const.} \end{cases} \\
\Rightarrow &\begin{cases} \frac{1}{\gamma}((1-\tau)(\tau A)^{\frac{1}{\alpha}} - n - \beta) = \text{const.} \\ (1-\tau)(\tau A)^{\frac{1}{\alpha}} - n - (\frac{c}{k})_{BGP} = \text{const.} \end{cases} \\
\Rightarrow &(\frac{c}{k})_{BGP} = \text{const.} \Rightarrow \gamma_c = \gamma_k \\
\Rightarrow &(\frac{c}{k})_{BGP} = (1-\tau)(\tau A)^{\frac{1}{\alpha}} - n - \frac{1}{\gamma}((1-\tau)(\tau A)^{\frac{1}{\alpha}} - n - \beta) \\
\Rightarrow &\begin{cases} f(k) = (\tau A)^{\frac{1}{\alpha}} k \\ \frac{1}{\gamma}((1-\tau)(\tau A)^{\frac{1}{\alpha}} - n - \beta) > 0 \\ (1-\tau)(\tau A)^{\frac{1}{\alpha}} - n - \frac{1}{\gamma}((1-\tau)(\tau A)^{\frac{1}{\alpha}} - n - \beta) > 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

5 *Conclusion*

本次课程始与 2023 年 9 月 15 日开课，12 月 29 日结课，17 课时，内容是非常标准的高级宏观内容。区别于其他大杂烩的高级宏观课程，这门课程类似于 MWG 在微观经济中的基础性地位。龚六堂教授循循善进的将高级宏观的基本框架从无到有的搭建起来。从最基本的 IS-LM 开始讲起，实现从中级宏观到高级宏观的过渡，在这个过程中，一方面是分析模型的复杂化要求更复杂的数学工具处理宏观问题，另一方面是不断碰到的现实性难题推动宏观经济模型不断动态化、理性化和内生化。从 *Keyness IS-LM* 框架到 *Solow* 模型再到 *Ramsey* 模型，其中 *Keyness IS-LM* 是静态的无增长框架，*Solow* 模型是动态的、非理性选择的增长框架，*Ramsey* 框架是理性选择下的外生增长框架，进一步的我们将其推广到理性选择下的内生增长框架。上述三个框架，尤其是 *Ramsey* 框架构成了宏观经济分析的基本框架。时间受限，高级宏观的绝大部分正式内容在这门课程中没有涉及，正如 MWG 中消费者和厂商理论无论多么精美，都不会出现在最前沿的研究中，这是毫无疑问的。但是诚如龚六堂所言，做宏观研究脑子中没有上百篇的宏观理论文献，没有非常扎实的理论基础，不知道从一个模型到另一个模型的改进和拓展，是注定做不好的。宏微观理论研究均需要极为扎实的基础和经济学思维，一方面要重视基础技术手段，另一方面要重视经济学思维直觉。

下一步的学习策略：（1）萨金特《递归宏观经济学》，涉及动态经济学以及各类标准的高级宏观经济模型；（2）*Acemoglu*《现代经济增长导论》，涉及各种类型的经济增长理论与前沿研究，*Acemoglu* 最好的教材；（3）龚六堂往年高级宏观课程讲义，会更多涉及到 *OLG*、*RBC* 等领域。

6 *Appendix*

6.1 新古典生产函数性质

新古典生产函数具有如下性质：

1. 非负性：$F(K,L)\geq 0, F(K,0)=F(0,L)=0$，非负性要求两种要素的投入严格为正；
2. 单调性：$F_K>0, F_L>0$，单调性使得产出随着投入的增加而增加；
3. 一次齐次性：$F(tK,tL)=tF(K,L)$，规模报酬不变；
4. 凹性：生产函数的海塞矩阵是秩为 1 的负半定矩阵；实际上，只要生产函数是拟凹的，在其他几条假设下该假设自然成立。注意，生产函数是凹函数，但并非严格凹函数；
5. 稻田条件：稻田条件保证了企业必须选择严格正的投入；

进一步的我们对于凹性假设给出说明：首先我们可以证明不存在严格凹函数满足星新古典生产函数的其他假设；给定齐次性可知

$$F(K,L)=KF_K+LF_L\rightarrow F_{KK}K+F_{KL}L=0, F_{LL}L+F_{KL}K=0 \tag{6.1}$$

海塞矩阵行列式等价于

$$det(H)=F_{KK}F_{LL}-F_{KL}^2=0 \tag{6.2}$$

因此齐次性下 $F(K,L)$ 必然不是严格凹函数。

其次我们对于拟凹性给出说明：在拟凹性假定下，生产函数必然是凹函数，这是因为如下定理成立：函数 f 为定义在凸集 C 上的实值正函数，如果 f 是一次齐次的拟凹函数，那么 f 为凹函数。简要给出如下证明：对于任意的 x_1,x_2，有 $y_1=f(x_1), y_2=f(x_2)$，根据一次齐次性可以得到

$$f(x_1/y_1)=f(x_2/y_2)=1 \tag{6.3}$$

根据拟凹函数的性质可以得到

$$f(\frac{x_1}{y_1}\frac{y_1}{y_1+y_2}+\frac{x_2}{y_2}\frac{y_2}{y_1+y_2})\geq min[f(x_1/y_1,x_2/y_2)]=1 \tag{6.4}$$

因此可以得到 $f(\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2})\geq 1$，即

$$f(x_1+x_2)\geq f(x_1)+f(x_2) \tag{6.5}$$

这意味着

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geq f(\lambda x_1)+f((1-\lambda)x_2)=\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2) \tag{6.6}$$

因此，在拟凹假设下，生产函数不仅是拟凹函数，也是凹函数。

综上而言，我们发现新古典生产函数是凹函数但并非严格凹函数，所以等价形式表述为“生产函数的海塞矩阵是秩为 1 的负半定矩阵”。

6.2 风险厌恶函数

6.2.1 CRRA 函数

定义绝对风险厌恶系数

$$ARA=-\frac{u'(x)}{u''(x)} \tag{6.7}$$

当绝对风险厌恶系数为常数时，效用函数形式表示为

$$u(x) = -\frac{1}{\phi}e^{-\phi x} \tag{6.8}$$

其中 ϕ 表示绝对风险厌恶系数，效用函数被称为常绝对风险厌恶（CARA）效用函数。

相应的定义相对风险厌恶系数：

$$RRA = -\frac{xu'(x)}{u''(x)} \tag{6.9}$$

当相对风险厌恶系数为常数时，效用函数形式表示为

$$u(x) = \frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} \tag{6.10}$$

其中 σ 表示相对风险厌恶系数，效用函数被称为常相对风险厌恶（CRRA）效用函数，这种效用函数形式是最为常见的跨期优化问题的函数形式。注意，参数 σ 不仅代表了相对风险厌恶系数，$\frac{1}{\sigma}$ 也表示了跨期消费的替代弹性。除此之外，CRRA 效用函数还具有另一种表达方式：

$$u(x) = \begin{cases} \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} & \text{if } \sigma \neq 1 \\ lnx & \text{if } \sigma = 1 \end{cases} \tag{6.11}$$

6.2.2 替代弹性

替代弹性定义为两种商品相对价格的变化对两种商品需求之比（或投入之比）的影响；具体而言，替代弹性定位为

$$\varepsilon = -\frac{dln(x_1/x_2)}{dln(p_1/p_2)} \tag{6.12}$$

根据消费者的最优选择，替代弹性额可以等价的定义为

$$\varepsilon = -\frac{dln(x_1/x_2)}{dlnMRS_{12}} \tag{6.13}$$

在动态问题中，我们将不同期的消费看作是不同的商品，他们之间的替代弹性便是跨期替代弹性。我们考虑如下效用函数

$$U = \int e^{\beta t}\frac{x^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}dt \tag{6.14}$$

任意两期 s, t 之间的替代弹性表示为

$$\varepsilon = -\frac{dln(x_s/x_t)}{dlnMRS_{st}} = \frac{1}{\sigma} \tag{6.15}$$

由此可见，$\frac{1}{\sigma}$ 代表跨期替代弹性。在 CRRA 效用函数下，任意两期商品的替代弹性恒为常数，因此 CRRA 效用函数也被叫做常跨期替代弹性（CES）效用函数。当 $\sigma > 1$ 时，不同期商品的互补性强于替代性，当 $\sigma < 1$ 时，不同期商品的替代性强于互补性。

6.3 自治系统的 *Hamilton* 方法

经济中我们经常碰到的问题是

$$max_{x,u} \int e^{-\rho t}f(x,u)dt \tag{6.16}$$

$$s.t.\ \dot{x}(t) = g(x,u), x(0) = x_0 \tag{6.17}$$

该问题中，函数 f, g 均不显示的含有时间 t，且时间 t 仅以常数贴现因子的方式进入目标函数，这种问题我们称之为自治问题。对于自治问题，我们可以利用当前值 $Hamilton$ 方法处理。

定义当前值的 $Hamilton$ 函数：

$$\bar{H} = f(x,u) + \mu g(x,u) = e^{\rho t} H \tag{6.18}$$

其中 μ 是当前值 $Hamilton$ 乘子，衡量状态变量的边际价值。最优解满足如下条件：

1. 最优性条件：$\frac{\partial \bar{H}}{\partial u} = 0, \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial u^2} \leq 0$；
2. 欧拉方程：$\frac{\partial \bar{H}}{\partial x} = \rho\mu - \dot{\mu}(t)$；
3. 可行性条件：$\dot{x}(t) = g(x,u), x(0) = x_0$
4. 横截性条件：考虑终点约束 $x(T) \geq a$，TVC 给定为 $e^{-\rho t}\mu(T)(x(T) - a) = 0, \mu(T) \geq 0, x(T) \geq a$；

如果 f, g 均为关于 (x, u) 的凹函数（海塞矩阵判定），可以得到二阶充分条件。对于该自治系统，我们现在考察 $Hamilton$ 乘子的经济意义。

我们从值函数的角度考察自治系统下乘子的经济意义，首先考察传统的定义为贴现值值函数形式，定义值函数

$$J(t,x) = max_{x,u} \int_t^T e^{-\rho s} f(x(s), u(s)) ds \tag{6.19}$$

值函数表示在 t 时刻，给定 $x(t)$ 状态最优化结果，其与 $Hamilton$ 乘子的关系是

$$\frac{\partial J(t, x(t))}{\partial x(t)} = \lambda(t) \tag{6.20}$$

即 $Hamilton$ 乘子的含义是：当状态变量 $x(t)$ 增加一个单位时，最优值函数 $J(t, x(t))$ 的增量，也即状态变量的边际价值，且将该价值贴现到第 0 期。

定义当前值值函数

$$V(t, x(t)) = V(x(t)) = max_{x,u} \int_t^T e^{-\rho(s-t)} f(x(s), u(s)) ds \tag{6.21}$$

与 $J(t, x(t))$ 不同的是，$V(t, x(t))$ 并未将价值贴现到第 0 期，而仅仅贴现到第 t 期，当前值值函数与 $Hamilton$ 乘子的关系是

$$\frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x(t)} = \mu(t) \tag{6.22}$$

即当前值 $Hamilton$ 乘子的含义是：当状态变量 $x(t)$ 增加一个单位时，最优值函数 $V(t, x(t))$ 的增量，也即状态变量的边际价值；不同的是，该价值不贴现到第 0 期，而是贴现到当前第 t 期。

对于无限期自治问题，定义当前值 $Hamilton$ 函数更具有优势，因为当前值 $Hamilton$ 乘子 $\mu(t)$ 常常是存在稳态的，所以在稳定性分析上能起到一定作用，例如，$Ramsey\ Model$ 中分析 (μ, k) 系统比分析 (c, k) 系统更简便；而 $Hamilton$ 乘子 $\lambda(t)$ 则不存在稳态。

7 *Reference*

龚六堂，2001：《高级宏观经济学》，武汉：武汉大学出版社。

龚六堂，苗建军，2014：《动态经济学方法》，北京：北京大学出版社。

Acemoglu Daron，*2009*：*Introduction to Economic Growth, MIT Press.*

Barro, R. J. and X. Sala I Martin , 1995: Economic Growth New York: McGraw Hill Inc. Blanchard, O.

Sargent T., 1986: Macroeconomic Theory, MIT Press.

Sargent T., 2000: Recursive Macroeconomic Theory, MIT Press.

Bumeister E. and A. Dobell, 1993: Matematical Theories of Economic Growth, The Macmillan Company.

Blanchard, O. J. and S. Fischer, 1989: Lectures on Macroeconomics, Cambridge MA: MIT Bumeister E.