动态优化方法 I

Based on lectures by Gong Liutang(GSM)

Wang Bencheng

Department of Applied Economics, GSM

2024 年 1 月 24 日

“我们企盼这所校园能哺育出这样一群学子：现实者不功利，理想者不空谈，仁爱者不软弱，刚直者不偏激；每个人都是尽责的公民，每个人都能坚守自己独立的人格，每个人都能为他人的幸福拓展纵深。”

目录

1 凸分析基础

1.1 凸集合与凸集分离定理

凸分析的基础是凸集合，在凸集合的基础上引入凹凸函数的集合定义并延展进行凸分析，因而集合是凸分析的整体性基础。

1.2 凸集合

定义凸集合：对于任意的 $x \in C$ 以及任意的 $\lambda \in [0,1]$，均有 $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in C$，则该集合称为凸集合。容易理解，凸集合是对于线性运算封闭的集合，任何集合内元素线性运算后依旧处于集合内部。特殊的，空集合与单点集 $\{x\}$ 均为凸集合。

等价定义给定为：对于任意的 $x_1, \ldots, x_k \in C$，$\lambda_i \in [0,1], \sum \lambda_i = 1$，如果 $\sum_i x_i\lambda_i \in C$，则集合 C 为凸集合，利用数学归纳法容易证明。

凸集合满足如下性质：如果集合 C, D 是凸集合，则 (1) $tC = tx|x \in C$ 依旧是凸集合；(2) $C + D = x + y|x \in C, y \in D$ 依旧是凸集合；(3) $C \cap D$ 依旧是凸集合；(4) $C \cup D$ 是否是凸集合不确定，例如两个没有交集的区间各自均为凸集合，但是并集并非凸集合。

1.2.1 凸集分离定理

分离定理是凸集特有的性质；二维空间中的线可以定义为任意两点间的线性组合，三维空间中的平面可以定义为任意三点之间的线性组合，进一步的在高维空间中定义线性运算的超平面，定义超平面：

$$H = \{x \in \mathcal{R}^n | a^T x = b, \sum_i a_i x_i = b\} \ a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{R}^n, b \in \mathcal{R}^n$$

即超平面表示高维空间中点的线性组合构成的平面，超平面的存在可以用来分割空间，从而构成上半水平集 $H^+ = \{x|a^T x \geq b\}$ 和下半水平集 $H^- = \{x|a^T x \leq b\}$，可以证明：超平面 H 以及超平面对应的上半水平集 H^+ 和下半水平集 H^- 均为凸集合。

点与集合分离定理：假定 C 是凸集合且为闭集合，$0 \notin C$，存在超平面严格分离 C 与 0；拓展形式表示为：存在 $a, b \in \mathcal{R}^n$，使得超平面 H 将凸集合 C 与凸集合外的点严格分离。注意到，分离超平面不是唯一的，点与凸集合之间存在无穷多的分离超平面。

集合间的分离定理（第一分离定理）：假定 C, D 均为凸集合，同时 $C \cap D = \phi$，则存在分离超平面使得凸集合 C 与凸集合 D 分离；数学形式表示为：存在 a, b 使得 $a^T x \geq b \geq a^T y$。第一分离定理是不严格的分离定理，对于边界的情形未做清晰的讨论，下面给出集合间的严格分离定理。

集合间的分离定理（第二分离定理）：假定 C, D 均为凸集合，同时 $C \cap D = \phi$，另外假定集合 C, D 均为闭集合，集合 C 或者 D 为有界集合，例如集合 C 为有界闭集合（紧集合），集合 D 为闭集合，存在 $a, b \in \mathcal{R}^n, x \in C\ y \in D$，使得 $inf_{x \in C} a^T x > b > sup_{y \in D} a^T y$[1]。给定上述严格假设，存在分离超平面将两个不相交的凸集合严格分离。

1.2.2 凸集合的极点

定义凸集合内的极点：如果 $x \in C$，不存在 $x_1, x_2 \in C, \lambda \in [0,1]$，使得 $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in C$，则 x 是凸集合 C 的极点，极点集合定义为 $ext(C)$。简单的理解，极点是集合中的边界点而非内点，任何内点都可以通过边界点的线性组合得到，从而极点的线性组合可以表示任意非极点，而极点不可以被其他点的线性组合所表示。

[1]其中，inf 表示下确界，sup 表示上确界，这是因为闭集合 D 可能为无界的闭集合，因此使用极限方法进行表述。

进一步的，定义有限个半空间的交集为凸多包体；如果有限个半空间的交集为有界集合，则定义为凸多面体。相应的，如果集合 K 为凸多面体，$ext(K)$ 为集合 K 的极点集合，则凸多面体的任意点可以被极点所表示。

对于线性规划问题：

$$\begin{aligned} max(min)\ & \sum c_i x_i \\ s.t.\ & \sum_j a_{ij} x_j \geq b_i \end{aligned}$$

相应的线性规划的可行集合表示为 $K = \{x | \sum_j^n a_{ij} x_i \geq b_i, i = 1, \ldots, m\}$，表示 m 个半空间的交集并且该集合为有界集合，因而可行集合为凸多面体。不加证明的给出如下定理：

如果线性规划的可行集合为凸多面体，则线性规划的解一定是在极点处取得；

1.3 凸函数及其等价定义

定义凸函数：如果 $f: C \to R$ 为凸函数，其中 $C \in \mathcal{R}^n$ 为凸集合，则满足如何条件，即对于任意的 $x_1, x_2 \in C$，任意 $\lambda \in [0,1]$，均有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

即凸组合的函数值小于函数值的凸组合；凹函数相应的定义为

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

即凸组合的函数值大于函数值的凸组合。更为一般性的定义表示为：对于任意的 $x_1, \ldots, x_m \in C, \lambda_i \in [0,1], \sum_i^m \lambda_i = 1$，满足

$$f(\sum \lambda_i x_i) \leq \sum \lambda_i f(x_i)$$

凹函数相应的定义为

$$f(\sum \lambda_i x_i) \geq \sum \lambda_i f(x_i)$$

对于连续形式则表示为 $Jessen$ 不等式：凹函数满足

$$u(\int x dx) \geq \int u(x) dx$$

1.3.1 几何形式等价定义

如果 f 是凸函数，对于任意的 $x_1 \leq x_2 \leq x_3$，均有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

利用几何图形可以清楚的表明上述关系：在三点处斜率关系满足 $k_{x_1 x_2} \leq k_{x_1 x_3} \leq k_{x_2 x_3}$。

Proof: 如果 f 为凸函数，则满足 $f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$，取 $\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$，相应的可以得到 $x_2 = \lambda x_3 + (1-\lambda) x_1$，同时得到 $f(x_2) \leq \lambda f(x_3) + (1-\lambda) f(x_1)$，因而化简 $f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ 得到

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3) + \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1)$$

第一个不等式可以证明；另取 $\lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$，证明第二个不等式。

1.3.2 转换形式等价定义

如果 f 是凸函数，对于任意的 $x_1, x_2 \in C, \lambda \in [0,1]$，对于函数 $\phi(\lambda) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$ 是关于 λ 的凸函数。

Proof: (*1*) 如果已知 $\phi(\lambda)$ 为凸函数，证明 $f(x)$ 为凸函数：对于任意的 $t \in [0,1]$，凸函数 ϕ 满足 $\phi(t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2) \le t\phi(\lambda_1) + (1-t)\phi(\lambda_2)$，相应的有

$$\phi(\lambda) = \phi(\lambda \times 1 + (1-\lambda) \times 0) \le \phi(1)\lambda + (1-\lambda)\phi(0) = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

从而 $f(x)$ 为凸函数，证毕；(*2*) 如果已知函数 $f(x)$ 为凸函数，证明 $\phi(\lambda)$ 为凸函数：已知 $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$，需要证明 $\phi(t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2) \le t\phi(\lambda_1) + (1-t)\phi(\lambda_2)$，证明如下：

$$\begin{aligned}
&f[(t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2)x_1 + (1-(t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2))x_2] \\
&= f[(\lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1)x_2)t + (\lambda_2 x_1 + (1-\lambda_2)x_2)(1-t)] \\
&\le t f(\lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1)x_2) + (1-t) f(\lambda_2 x_1 + (1-\lambda_2)x_2) \\
&\le t\phi(\lambda_1) + (1-t)\phi(\lambda_2)
\end{aligned}$$

从而 $\phi(\lambda)$ 为凸函数，证毕。

1.3.3 一阶可微的的等价定义

如果函数 $f(x)$ 为一阶连续凸函数，则对于任意的 $x, y \in C$，满足[2]

$$f(y) - f(x) \ge \bigtriangledown^T f(x)(y-x)$$

如果函数 $f(x)$ 为一阶连续凹函数，则满足

$$f(y) - f(x) \le \bigtriangledown^T f(x)(y-x)$$

其中，$\bigtriangledown^T f(x) = [\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}]$ 表示梯度向量。

Proof: (*1*) 如果已知 $f(y) - f(x) \ge \bigtriangledown^T f(x)(y-x)$，证明函数为凸函数：取 $y = x_1, x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$，相应的得到

$$f(x_1) - f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge \bigtriangledown^T f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)(1-\lambda)(x_1 - x_2)$$

取 $y = x_2$，同理可得

$$f(x_2) - f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge \bigtriangledown^T f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)\lambda(x_2 - x_1)$$

两式处理得到

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \ge f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$$

因而函数 $f(x)$ 是凸函数，证毕；(*2*) 如果已知函数 $f(x)$ 为凸函数，证明满足一阶条件不等式：

$$\begin{aligned}
&f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \\
\to &f(\lambda(x_1 - x_2) + x_2) \le \lambda[f(x_1) - f(x_2)] + f(x_2) \\
\to &\frac{f(\lambda(x_1 - x_2) + x_2) - f(x_2)}{\lambda} \le f(x_1) - f(x_2) \\
\to &\bigtriangledown^T f(x_2)(x_1 - x_2) \le f(x_1) - f(x_2)
\end{aligned}$$

因而一阶条件得到满足，证毕。

[2] 从二阶条件理解更为简便：如果函数为凸函数，则 $f'' > 0$，二阶泰勒展开项为正，从而分时左端大于分式右端一阶导；

1.3.4 二阶可微的的等价定义

如果函数 $f(x)$ 为二阶连续可微函数，定义 *Hessian* 矩阵：

$$H_{f(x)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

表示函数二阶导矩阵；如果函数 $f(x)$ 为凹函数，则二阶 *Hessian* 矩阵为负半定矩阵[3]。实际应用中，多元函数的凹凸性质利用 *Hessian* 矩阵判定。

Proof：根据转换形式的等价定义可知，$\phi(\lambda)$ 为关于 λ 的凸函数，$\phi(\lambda) = f(x_2 + \lambda(x_1 - x_2))$，因此可以得到

$$\begin{aligned} \phi'(\lambda) &= \bigtriangledown^T f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)(x_1 - x_2) \\ \phi''(\lambda) &= \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1^i - x_2^i)(x_1^j - x_2^j) = (x_1 - x_2)^T H_f (x_1 - x_2) \leq 0 \end{aligned}$$

因而矩阵 H_f 是负半定矩阵。

1.4 拟凹与拟凸函数

如果 $f(x) : C \to \mathcal{R}^n$ 是拟凸函数，对于任意的 $x_1, x_2 \in C$，$\lambda \in [0,1]$，满足

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq max\{f(x_1), f(x_2)\}$$

相应的，如果 $f(x) : C \to \mathcal{R}^n$ 是拟凹函数，对于任意的 $x_1, x_2 \in C$，$\lambda \in [0,1]$，满足

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq min\{f(x_1), f(x_2)\}$$

1.4.1 集合等价定义

集合形式等价定义：如果 $f(x)$ 是拟凸函数，则下水平集 $\Gamma_\alpha^- = \{x|f(x) \leq \alpha\}$ 为凸集合；如果 $f(x)$ 为拟凹函数，则上水平集合 $\Gamma_\alpha^+ = \{x|f(x) \geq \alpha\}$ 为凸集合。

Proof：(*1*) 如果 $f(x)$ 是拟凸函数，证明 $\Gamma_\alpha^- = \{x|f(x) \leq \alpha\}$ 为凸集合：要证明下水平集为凸集合，则需证明 $x_1, x_2 \in \Gamma_\alpha^-, \lambda \in [0,1]$，有 $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \Gamma_\alpha^-$，进一步的可以得到

$$\begin{aligned} &f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq max\{f(x_1), f(x_2)\} \leq \alpha \\ \to &\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \Gamma_\alpha^- \end{aligned}$$

因而 Γ_α^- 是凸集合，证毕；(*2*) 如果下水平集 Γ_α^- 为凸集合，证明函数 $f(x)$ 为拟凸函数：已知 $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \alpha, f(x_1) \leq \alpha, f(x_2) \leq \alpha$，取 $\alpha = max\{f(x_1), f(x_2)\}$，可以得到

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq max\{f(x_1), f(x_2)\}$$

因而函数 $f(x)$ 为拟凸函数，证毕。

例如，一般要求生产要素需求集合 $V(y) = \{x|f(x) \geq y\}$ 为凸集合（上水平集为凸集合），那么相应的生产函数 $f(x)$ 至少是拟凹函数（具备凹性）。

[3]负半定矩阵的证明包括如下形式：(1) 对于任意的 $x \neq 0$，均有 $x^T Hx \leq 0$；(2) 所有的特征根均小于等于 0；(3) 所有的主子式行列式均小于等于 0；

1.4.2 连续可微等价定义

Arrow(1961ECMA) 给出了拟凹拟凸函数的可微判别形式：定义加边海塞矩阵（*Border Hessian*）

$$B_f = \begin{pmatrix} 0 & \bigtriangledown^T f(x) \\ \bigtriangledown^T f(x) & H_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots & & \cdots & \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

定义 k 阶行列式

$$D_k(f) = det \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k} \\ \cdots & & \cdots & \\ \frac{\partial f}{\partial x_k} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \end{bmatrix}$$

***Arrow and Enthoven*（*1961*）给出如下结论：**

1. 函数 $f(x)$ 为拟凸函数的充分条件是 $D_k(f) < 0$，对于任意的 $k = 1, \ldots, n$；$f(x)$ 是拟凸函数的必要条件是 $D_k(f) \leq 0$；

2. 函数 $f(x)$ 为拟凹函数的充分条件是 $D_k(f)$ 与 $(-1)^k$ 同号；$f(x)$ 是拟凹函数的必要条件是 $(-1)^k D_k(f) \geq 0, k = 1, \ldots, n$；

1.5 经济理论中常用函数性质

1.5.1 新古典生产函数

新古典生产函数 $F(K, L)$ 满足如下五个基本假定：

1. 非负性：$F(K, L) \geq 0, F(K, 0) = F(0, L) = 0$，非负性要求两种要素的投入严格为正；
2. 单调性：$F_K > 0, F_L > 0$，单调性使得产出随着投入的增加而增加；
3. 一次齐次性：$F(tK, tL) = tF(K, L)$，规模报酬不变；满足 *Euler* 方程：$F(K, L) = F_K K + F_L L$；
4. 凹性：生产函数的海塞矩阵是秩为 1 的负半定矩阵；实际上，只要生产函数是拟凹的，在其他几条假设下该假设自然成立。注意，生产函数是凹函数，但并非严格凹函数；
5. *Inada* 条件：$\lim_{t \to 0} F_K \to \infty, \lim_{t \to 0} F_L \to \infty$；$\lim_{t \to \infty} F_K \to 0, \lim_{t \to \infty} F_L \to 0$；

进一步的对于凹性假设给出说明：首先可以证明不存在严格凹函数满足星新古典生产函数的其他假设；给定齐次性可知

$$F(K, L) = KF_K + LF_L \to F_{KK}K + F_{KL}L = 0, F_{LL}L + F_{KL}K = 0$$

海塞矩阵行列式等价于

$$det(H) = F_{KK}F_{LL} - F_{KL}^2 = 0$$

因此齐次性下 $F(K, L)$ 必然不是严格凹函数。

其次对于拟凹性给出说明：在拟凹性假定下，生产函数必然是凹函数，这是因为如下定理成立：函数 f 为定义在凸集 C 上的实值正函数，如果 f 是一次齐次的拟凹函数，那么 f 为凹函数。简要给出如下证明：对于任意的 x_1, x_2，有 $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$，根据一次齐次性可以得到

$$f(x_1/y_1) = f(x_2/y_2) = 1$$

根据拟凹函数的性质可以得到

$$f(\frac{x_1}{y_1}\frac{y_1}{y_1+y_2}+\frac{x_2}{y_2}\frac{y_2}{y_1+y_2}) \geq min[f(x_1/y_1, x_2/y_2)] = 1$$

因此可以得到 $f(\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}) \geq 1$，即

$$f(x_1+x_2) \geq f(x_1)+f(x_2)$$

这意味着

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \geq f(\lambda x_1)+f((1-\lambda)x_2) = \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

因此，在拟凹假设下，生产函数不仅是拟凹函数，也是凹函数。

综上而言，新古典生产函数是凹函数但并非严格凹函数，所以等价形式表述为“生产函数的海塞矩阵是秩为 *1* 的负半定矩阵”。

1.5.2 间接效用函数 $V(p,m)$ 关于 p,m 为拟凸函数

对于 $(p^1,m^1),(p^2,m^2)$，考察其凸组合 $(p^t,m^t)=t(p^1,m^1)+(1-t)(p^2,m^2)$，$t\in[0,1]$；仅需证明 $B^t=\{x|p^tx\leq m^t\}$ 中的元素全部位于 $B^1=\{x|p^1x\leq m^1\}$ 或者 $B^2=\{x|p^2x\leq m^2\}$ 中。假定存在 $\bar{x}\in B^t$，同时有 $\bar{x}\notin B^1,B^2$，则有

$$\begin{aligned}
&p^1\bar{x}\geq m^1, p^2\bar{x}\geq m^2\\
\to&[tp^1+(1-t)p^2]\bar{x}\geq tm^1+(1-t)m^2\\
\to&p^t\bar{x}\geq m^t
\end{aligned}$$

这与 $\bar{x}\in B^t$ 相矛盾，表明所有的 $\bar{x}\in B^t$ 均有 $\bar{x}\in B^1$ 或者 $\bar{x}\in B^2$，从而有

$$V(p^t,m^t)\leq max\{V(p^1,m^1),V(p^2,m^2)\}$$

因而 $V(p,m)$ 关于 (p,m) 为拟凸函数。

1.5.3 支出函数 $e(p,u)$ 关于 p 为凹函数

假定 $e(p_1,u)=min\ p_1x, e(p_2,u)=min\ p_2x$，令 $p_3=\lambda p_1+(1-\lambda)p_2$，则有

$$e(p_3,u)=e(\lambda p_1+(1-\lambda)p_2,u)=min\ [\lambda p_1+(1-\lambda)p_2]x\geq\lambda e(p_1,u)+(1-\lambda)e(p_2,u)$$

其中最后等式根据支出函数的值函数性质，在 p_1,p_2 处相应的取得最小成本。

1.5.4 利润函数 $\pi(p,w)$ 关于 p 为凸函数

假定 $\pi(p_1,w)=max\ p_1y, \pi(p_2,w)=max\ p_2y$，令 $p_3=\lambda p_1+(1-\lambda)p_2$，则有

$$\pi(p_3,w)=\pi(\lambda p_1+(1-\lambda)p_2,w)=max\ [\lambda p_1+(1-\lambda)p_2]y\leq\lambda\pi(p_1,w)+(1-\lambda)\pi(p_2,w)$$

其中最后等式根据利润函数的值函数性质，在 p_1,p_2 处相应的取得最大利润。

1.5.5 成本函数 $c(w,y)$ 关于 w 为凹函数

假定 $c(w_1,y)=min\ w_1x, c(w_2,y)=min\ w_2x$，令 $w_3=\lambda w_1+(1-\lambda)w_2$，则有

$$c(w_3,y)=c(\lambda w_1+(1-\lambda)w_2,y)=min\ [\lambda w_1+(1-\lambda)w_2]x\geq\lambda c(w_1,y)+(1-\lambda)c(w_2,y)$$

其中最后等式根据成本函数的值函数性质，在 w_1,w_2 处相应的取得最小成本。

2 动力系统

处理动态问题时经常遇到如下两种形式的动力系统：连续的微分方程动力系统表示为

$$\begin{aligned} &max \int u(C_t)e^{-\beta t}dt \\ &s.t.\ \dot{A}_t = rA_t + wL_t - C_t \end{aligned}$$

离散的差分方程动力系统表示为

$$\begin{aligned} &max \sum \beta^t u(c_t) \\ &s.t.\ A_{t+1} - A_t = rA_t + w_tL_t - C_t \end{aligned}$$

无论哪一种形式都需要利用动力系统的方法进行求解，包括微分动力系统与差分动力系统。为什么要是用动力系统方法呢？这是因为一般情况下无法直接求出显式解，即资本和消费的动态路径，但是可以利用动力系统的方法证明该系统的均衡点是稳定的，一旦证明系统均衡点是稳定的，那么可以将对收敛路径的分析转化为对稳定均衡点的分析，从而极大的简化了分析过程。注意，本章内容是整个动态经济分析的基础性内容，绝大部分的宏观经济问题都需要讨论解的存在性、唯一性与稳定性，并对稳态均衡解进行比较静态分析。

2.1 连续时间一维动力系统

给定标准的一维动力系统

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t), x(0) = x_0$$

对于任何动力系统，微分方程中未知数个数与初始条件（或终点条件）个数需要相等，此时系统的解才是封闭的。对于该一维动力系统或微分方程，部分情况下可以直接根据常微分方程进行求解，其余情况下则需要利用动力系统讨论解的稳定性问题。

2.1.1 存在显式解的动力系统

存在显式解的微分方程一般包括两种：可分离变量的微分方程与线性微分方程。给定标准的总量 $Solow\ Model$：资本市场和劳动市场的动态过程给定为

$$\begin{aligned} &\dot{K}(t) = sF(K(t), L(t)) - \delta K(t), K(0) = K_0 \\ &\dot{L}(t)/L(t) = n, L(0) = L_0 \end{aligned}$$

两个变量对应两个初始条件，上述动力系统解是封闭的，转化为人均形式的动力系统：

$$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - (n+\delta)k(t)$$

上述微分方程即为常见的一维动力系统。给定生产函数的形式，例如 $f(k) = Ak, f(k) = min\{b/a, 1/b\}, f(k) = Ak^\alpha$ 三种形式下均可以求解 (c_t, k_t) 的显式解。

Case: 给定 $f(k) = Ak^\alpha$，下面求解显式解：原方程转化为

$$\dot{k}(t) = sAk^\alpha(t) - (n+\delta)K(t), k(0) = k_0$$

令 $z = k^{1-\alpha}$，微分方程表示为 $\dot{z} = sA(1-\alpha) - (1-\alpha)(n+\delta)z$，该方程为可求解的线性微分方程，利用通解公式得到

$$z(t) = Ce^{-(1-\alpha)(n+\delta)t} + \frac{sA}{n+\delta}$$

根据初始条件可知

$$k(t)=[\frac{sA}{n+\delta}+(k_0^{1-\alpha}\frac{sA}{n+\delta})e^{-(1-\alpha)(n+\delta)t}]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

根据动力系统可知 $\dot{k}=0\to k^*=(\frac{sA}{n+\delta})^{\frac{1}{1-\alpha}}$，同时 $\lim k(t)=(\frac{sA}{n+\delta})^{\frac{1}{1-\alpha}}=k^*$，因此该动力系统的均衡解是稳定的。

2.1.2 一维线性动力系统的稳定性

定义一般化的一维线性动力系统

$$\dot{x}=ax+b,x(0)=x_0$$

简单起见假定 $b=0$（$b\neq 0$ 时基本结论保持不变）。定义该问题的均衡点 x^* 为 $\dot{x}|_{x^*}=0,x^*=0$，即在该点处 x 变化率为 0，保持稳定，从而将稳定性引入动力系统分析。

定义**稳定性**或渐进稳定性：从任意的 $x(t)$ 出发均有 $x(t)\to x^*$，则 x^* 是稳定的，即从任意时刻任意点出发均会收敛到某点，则该点是稳定点。如果 $x(t)$ 并不趋近于 x^*，则该点是不稳定的。在 $\dot{x}=ax$ 的动力系统中，$x=x_0e^{at}$，如果 $a>0$，此时 $x(t)$ 并不趋向于 $x^*=0$，此时 x^* 不稳定；如果 $a<0$，则 $x(t)$ 在无穷远处趋向于 $x^*=0$，此时 x^* 是稳定的。

在一般化的动力系统中，可以利用线性化方程的特征根判别动力系统的稳定性，如果特征根 $\lambda<0$，则该系统是稳定的。为什么要定义稳定性？对于稳定性，一般化的数学表示是：

> 如果 $x(t)\to x^*$ 是稳定的，则对于任意的 $\varepsilon>0$，使得当 $t>T$ 时，$|x(t)-x^*|<\varepsilon$；即在充分长的时刻后 $x(t)$ 位于 x^* 的邻域内。

给定上述稳定性定义，当时间充分长时可以利用稳定点 x^* 代替对于收敛路径 $x(t)$ 的讨论。

2.1.3 一维非线性动力系统

给定一维非线性动力系统

$$\dot{x}=f(x),x(0)=x_0$$

此时 $f(x)$ 为非线性函数，无法求解显式解，现在需要利用线性化方法讨论该非线性系统均衡点的存在性、唯一性和稳定性。注意，对于任何的稳定性性都需要讨论三个问题：解的存在性、解的个数（唯一性[4]、解的稳定性[5]。

定义**局部稳定性**：若对于任意的 $x(t)\in U_\delta(x^*)$，如果 $x(t)\to x^*$，则 x^* 是局部稳定的[6]。定义局部稳定性是为了更好的处理非线性系统，非线性系统往往难以处理，但是在非线性系统均衡点附近的线性化系统却可以进行很好的讨论，因而定义局部稳定性是为了能够在均衡点附近讨论其线性化系统的稳定性。这必然要求在均衡点附近的线性化系统稳定性与非线性系统稳定性是一致的，不加证明的给出**非线性化系统稳定性判别定理**：

> 非线性系统均衡点 x^* 的稳定性由该非线性系统在 x^* 附近的线性化系统的稳定性给出。

这意味着在均衡点 x^* 处可以得到

$$\dot{x}=f(x)=f(x^*)+f'(x^*)(x-x^*)=f'(x^*)(x-x^*)$$

[4]注：解的唯一性并不是严格要求，事实上，对于一个存在多解的模型具有更强的解释力，多均衡解中的稳定接和不稳定解往往更加贴合显示，因此做出多个均衡解的宏观模型更为重要；

[5]稳定性需讨论完全稳定还是鞍点稳定等；

[6]类似于局部最小值点的概念，在该点附近的领域内会稳定收敛到该点

其中根据均衡点定义存在 $\dot{x}=f(x^*)=0$，此时将关于 x 的非线性系统转化为关于 x 的线性化系统，x^* 在线性化系统的稳定性决定了非线性系统均衡点的稳定性，现在考察该线性化系统的稳定性即可。如果 $f'(x^*)<0$，则 x^* 是稳定的均衡点，相应的 x^* 是非线性动力系统的稳定均衡点。如果 $f'(x^*)>0$，则 x^* 不是稳定均衡点。如果 $f'(x^*)=0$，此时 x^* 是奇异点，需要使用更为复杂的数学工具进行讨论，此处不再展开[7]。

给定标准的 *Solow Model* 模型，利用动力系统讨论均衡点的存在性、唯一性和稳定性：首先考察均衡点的存在性：

$$\dot{k}=0\rightarrow sf(k^*)=(n+\delta)k^*$$

考虑到 $f(k)$ 为新古典生产函数，根据 *Inada* 条件和介值定理可知存在均衡点 k^*；接下来考察均衡点的唯一性：在 $(0,\infty)$ 上严格单调递减，因此必然存在唯一的均衡点 k^*；最后考察均衡点的的稳定性，在均衡点附近线性化展开得到

$$\dot{k}=[sf'(k^*)-(n+\delta)](k-k^*)$$

给定新古典生产函数的凹性可知 $f''(k^*)\leq 0\rightarrow f(k^*)\geq k^*f'(k^*)\rightarrow f'(k^*)\leq f(k^*)/k^*\rightarrow f'(k^*)\leq \frac{n+\delta}{s}$，因此 $sf'(k^*)-(n+\delta)<0$，该动力系统是稳定的，这也是为什么在 *Solow Model* 中只需要考察均衡点而不需要考察收敛路径的原因。给定均衡点 k^* 是稳定的，可以利用 k^* 进行比较静态分析，考察各种因素对于增长的影响。

2.2 离散时间一维动力系统

2.2.1 一维齐次线性动力系统

给定离散形式的一维动力系统：

$$x_{t+1}=f(x_t),x_0$$

上述动力系统表示关于 x_t 的线性或非线性一维差分差分方程。考察基本的线性形式，令 $f(x_t)=ax_t+b$，其中 $b=0$（$b\neq 0$ 不会影响结论），此时 $x_{t+1}=ax_t$，相应的根据一阶差分方程可知 $x_t=x_0a^t$。对于离散动力系统的均衡点，表示为：

$$x_{t+1}=x_t=\bar{x}\rightarrow\bar{x}=f(\bar{x})\rightarrow\bar{x}$$

其中 $x\bar{x}$ 表示动力系统的均衡点。与连续动力系统相一致，均衡点的稳定性由特征根给出，如果特征根大于 1，表明动力系统的均衡点是不稳定的；反之，如果特征根小于 1，则动力系统的均衡点是稳定的。数学形式表示为，如果 $|a|<1$，则 $\lim x_t\rightarrow\bar{x}$；如果 $|a|>1$，则均衡点不稳定。

注意：离散差分方程的特征根由如下方式给出，差分方程表示为 $a_t=ax_{t-1}$，定义 $x_t=\lambda^t$，代入得到

$$\lambda^{t-1}(1-a)=0\rightarrow a=1$$

由此 $a=1$ 表示该方程的一个特征根。

[7]注意，上述讨论的均为 $f(x)$ 中不显示的含有时间 t 的自治系统，如果给定为 $\dot{x}=f(x,t)$ 的形式，此时该系统为非自治系统，例如在 *Solow Model* 中考虑储蓄率的动态化：

$$\dot{k}=s(t)f(k)-(n+\delta)k$$

此时系统为非自治系统，讨论较为复杂，需要其他数学工具进行处理，在经济学中一般只考虑自治系统。

2.2.2 一维齐次非线性动力系统

非线性动力系统均衡点的稳定性根据一维动力系统在均衡点附近的线性展开系统的稳定性判定，因此只需判定均衡点附近的线性动力系统稳定性即可。

给定标准的离散形式的 *Solow Model*: 总量方程给定为

$$K_{t+1} - K_t = S_t = sF(K_t, L_t) - \delta K_t, L_{1+t}/L_t = 1 + n$$

其中 n 表示人口增长率，相应的两侧同时除以 L_t 人均化得到

$$k_{t+1} = \frac{sf(k_t) + (1-\delta)k_t}{1+n}$$

讨论均衡点 $\bar{k}$ 的存在性、唯一性和稳定性。首先，均衡点给定为

$$\bar{k} = \frac{sf(\bar{k}) + (1-\delta)\bar{k}}{1+n} \to sf(\bar{k}) = (n+\delta)\bar{k}$$

根据新古典生产函数的性质，可知存在唯一的均衡点 $\bar{k}$。上述一维动力系统在均衡点 $\bar{k}$ 附近线性化展开得到

$$\begin{aligned} k_{t+1} &= \frac{sf(\bar{k}) + (1-\delta)\bar{k}}{1+n} + \frac{sf'(\bar{k}) + (1-\delta)}{1+n}(k_t - \bar{k}) \\ &= \bar{k} + \frac{sf'(\bar{k}) + (1-\delta)}{1+n}(k_t - \bar{k}) \end{aligned}$$

因此一般形式的离散动力系统线性化展开后得到

$$k_{t+1} - \bar{k} = \frac{sf'(\bar{k}) + (1-\delta)}{1+n}(k_t - \bar{k})$$

考虑到生产函数的凹性，$\frac{sf'(\bar{k})+(1-\delta)}{1+n} < 1$，因此该动力系统的均衡点是稳定的。

不同于一维连续动力系统中的完全单调收敛，即从任意时刻出发向均衡点单方向收敛，一维离散动力系统中的收敛方向是波动的，即给定 $x_t = x_{t-1}$ 的均衡线，任意时刻出发向均衡点波动收敛，类似于逐渐稳定的波函数。传统形式的蛛网模型是上述一维离散动力系统的简单应用。

2.2.3 一维非齐次线性动力系统

考察非齐次线性动力系统

$$x_t = ax_{t-1} + b_t$$

上述线性齐次系统的通解表示为 $x_t = x_0 a^t$，现在只需要明确特解便可以讨论均衡点的性质。引入滞后算子 L，定义滞后算子运算 $Lx_t = x_{t-1}$，相应的

$$x_t = aLx_t + b_t \to x_t = \frac{b_t}{1-aL} = \sum_i^{\infty}(aL)^i b_t = \sum_i^{\infty} a^i (L^i b_t) = \sum_i^{\infty} a^i b_{t-i}$$

其中 $\frac{1}{1-x} = \sum x^i, |x| < 1$。同理，对于非齐次线性动力系统

$$x_t = ax_{t+1} + b_t$$

定义超前算子 D 以及超前算子运算 $Dx_t = x_{t+1}$，该线性非齐次动力系统的特解表示为 $x_t = \frac{b_t}{1-aD} = \sum_i^{\infty} a^i b_{t+i}$。

***Case* 货币的 *Cagan Model*:** 给定货币方程

$$\frac{M_t}{P_t} = m(i_t - \pi_t^e, T_t)$$

转化为对数形式得到

$$m_t - p_t = -\alpha(p^e_{t+1} - p_t)$$

首先考察适应性预期形势下价格的决定方程：给定适应性预期 $p^e_{t+1} = p_t + \gamma(p_t - p_{t-1})$，引入滞后算子 L，上述动力系统的特解表示为

$$p_t = \frac{1}{1-\alpha\gamma} m_t / [1 - \frac{\alpha\gamma}{\alpha - 1} L] = \sum_i^{\infty} \frac{1}{1-\alpha\gamma} (\frac{\alpha\gamma}{\alpha\gamma - 1})^i m_{t-i}$$

上述形式表明历史的货币发行决定了当前的市场价格。

其次考察理性预期下的价格决定方程，给定理性预期 $p^e_{t+1} = p_{t+1}$，表明个体是利用当前信息做出完全理性的完美预期，引入超前算子 D，上式动力系统的特解表示为

$$p_t = \frac{1}{1-\alpha} \frac{m}{1 - \frac{\alpha}{1+\alpha} D} = \frac{1}{1-\alpha} \sum_i^{\infty} (\frac{\alpha}{1+\alpha} D)^i m_t = \frac{1}{1-\alpha} \sum_i^{\infty} (\frac{\alpha}{1+\alpha})^i m_{t+i}$$

上述形式表明理性预期下，未来预期的货币发行量决定当前的市场价格。

2.3 二维动力系统

2.3.1 二阶连续动力系统

给定标准的二阶齐次线性动力系统

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11} x + a_{12} y \\ \dot{y} = a_{21} x + a_{22} y \\ \quad x_0, y_0 \end{cases} \to \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

其中 A 表示系数矩阵或者非线性动力系统线性化系数矩阵，其特征根决定了动力系统均衡点的稳定性。

定义二维系统的均衡点为 $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = 0$，得到均衡点 (x^*, y^*)。二维动力系统中进一步定义稳定性：如果从任意的 (x_t, y_t) 出发，最终均会收敛到 (x^*, y^*)，则该均衡点是完全稳定的；如果从任意时刻出发，最终时刻不收敛，则均衡点是不稳定的；如果从特定的 (x_0, y_0) 出发，任意时刻 (x_t, y_t) 最终会收敛到 (x^*, y^*)，则该均衡点是鞍点稳定的（*saddle-stable*）。鞍点稳定是二维动力系统以及高维动力系统的特征，其存在原因是某个方向上变量收敛而其他方向上变量发散，只存在鞍点路径保证了唯一的收敛性。在二维动力系统中鞍点路径只有一条，但是在高维动力系统中鞍点路径有多条。

为了讨论均衡点的存在性、唯一性和稳定性，需要针对系数矩阵的特征根进行讨论：假定系数矩阵特征根为 λ_1, λ_2，分三种情况进行讨论

1. 如果 λ_1, λ_2 为不相等的实根，则有

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \\ y(t) = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} c_1 e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}} c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

其中参数 c_1, c_2 根据初始值 (x_0, y_0) 决定。如果特征根 λ_1, λ_2 均大于 0，此时 (x_t, y_t) 发散，可知该动力系统的均衡点是不稳定的；如果 λ_1, λ_2 均小于 0，此时动力系统的均衡点是稳定的；如果 λ_1, λ_2 一正一负，假定 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$，为了保证均衡点的收敛性，此时 $c_1 = 0, \frac{y_{t+1}}{x_{t+1}} = \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}}$ 表明存在唯一的鞍点路径保证系统收敛到均衡点。

2. 如果 λ_1, λ_2 为相等的实根，则有

$$\begin{cases} x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t} \\ y(t) = \frac{\lambda - a_{11}}{a_{12}} (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t} \end{cases}$$

其中参数 c_1, c_2 根据初始值 (x_0, y_0) 决定。容易看出，如果特征根 λ 大于 0，该动力系统的均衡点是不稳定的；如果 λ 小于 0，此时动力系统的均衡点是稳定的；该种情况下不存在鞍点稳态。

3. 如果 λ_1, λ_2 为负根，假定 $\lambda_1 = a + bi, \lambda_2 = a - bi$，则有

$$\begin{cases} x(t) = e^{at}(c_1 cosbt + c_2 sinbt) \\ y(t) = e^{at}(b_1 cosb_t + b_2 sinbt) \end{cases}$$

其中 (c_1, c_2) 可以由初始条件确定，参数 (b_1, b_2) 可以表示为 (c_1, c_2) 的函数。判定动力系统的稳定性根据实部 a 的正负性质，如果 $a > 0$，该动力系统均衡点不稳定；如果 $a < 0$，该动力系统均衡点稳定；如果 $a = 0$ 时，退化为纯虚根，此时可能出现周期解，但是一般而言理性系统下的二维动力系统不会出现纯虚根的周期解，需要引入更高维系统才有可能出现。

2.3.2 二阶非线性连续动力系统

给定任意形式的连续动力系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \underbrace{\rightarrow}_{steady\ state} \begin{cases} f(x^*, y^*) = 0 \\ g(x^*, y^*) = 0 \end{cases}$$

给定均衡点决定方程，讨论均衡点的存在性、唯一性和稳定性；如果均衡点是稳定的，则可以使用 (x^*, y^*) 代替 (x_t, y_t) 进行讨论。给定如下定理：

> 非线性连续动力系统均衡点 (x^*, y^*) 的稳定性是由该动力系统在均衡点附近的线性化系统的稳定性决定的；

对于非线性动力系统，分别在均衡点处线性展开得到

$$\begin{cases} \dot{x} = f_x(x^*, y^*)(x - x^*) + f_y(x^*, y^*)(y - y^*) \\ \dot{y} = g_x(x^*, y^*)(x - x^*) + g_y(x^*, y^*)(y - y^*) \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x^*, y^*) & f_y(x^*, y^*) \\ g_x(x^*, y^*) & g_y(x^*, y^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{pmatrix}$$

注意到均衡点处有 $f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$，一阶线性展开后仅保留一次导数。定义线性化系数矩阵 A，特征根为 λ_1, λ_2，因此非线性系统均衡点的稳定性取决于线性化系统系数矩阵 A 的特征根的符号。

***Case:Ramsey Model* 均衡点稳定性的讨论**

给定标准的中央计划者问题的 *Ramsey Model*

$$max \int u(c) e^{\beta t} dt$$
$$s.t.\ \dot{k} = f(k) - nk - c, k_0$$

根据最优化条件导出资本积累和消费的动态方程：

$$\dot{c} = -\frac{u'(c)}{u''(c)}[f'(k) - n - \beta]$$
$$\dot{k} = f(k) - nk - c$$
$$\lim u'(c) e^{-\beta t} k(t) = 0, k_0$$

其中给定初始值 k_0 以及 *TVC*，二维动力系统封闭[8]。均衡点定义为 $\dot{c} = \dot{k} = 0 \rightarrow (c^*, k^*)$，下面讨论均衡点的存在性、唯一性和稳定性：

[8]注意：任何动力系统都需要给出封闭条件，即保证动力系统内生变量个数与初始条件、终止条件个数相等，从而保证解是封闭的；

首先，根据新古典生产函数的性质，$f'(k)$ 是严格单调递减的函数，因而 $f'(k)-n-\beta=0$ 唯一确定 k^*，从而根据 $f(k)-nk-c=0$ 唯一确定 c^*，因而均衡点是存在且唯一的；其次，考察均衡点的稳定性，在均衡点附近线性化展开得到

$$\begin{pmatrix} \dot{c} \\ \dot{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{u'(c^*)}{u''(c^*)} f''(k^*) \\ -1 & f'(k^*)-n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x^* \\ y-y^* \end{pmatrix}$$

定义线性化系数矩阵的特征根为 λ_1, λ_2，从而 $\lambda_1\lambda_2 = -\frac{u'(c^*)}{u''(c^*)} f''(k^*) < 0$，从而该动力系统的均衡点是暗点稳定的，即存在唯一的 (c_0, k_0)，使得从任意时刻 (c_t, k_t) 出发可以收敛到 (c^*, k^*)。

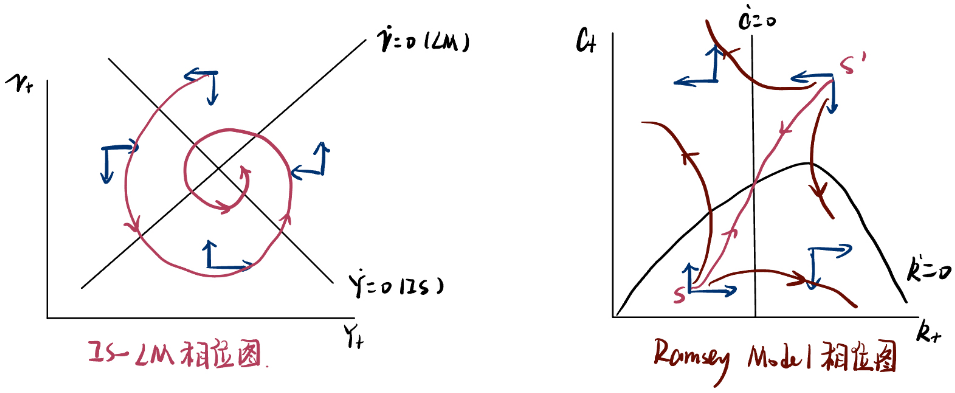


图 1: 二维离散动力系统的相位图：完全稳定与鞍点稳定

***Case*：动态 *IS-LM* 模型**

给定动态化的 *IS-LM* 模型：

$$\begin{cases} Y_t = C(Y_t - T) + I(r_t) + G \\ \frac{M_t}{P_t} = m(r_t, Y_t) \end{cases}$$

假定 P 外生给定，则内生变量为 (Y_t, r_t)，动力系统给定为：

$$\begin{cases} \dot{Y}_t = f(C(Y_t - T) + I(r_t) + G - Y_t), f(0)=0, f'()>0 \\ \dot{r}_t = g(m(r_t, Y_t) - \frac{M_t}{P_t}), g(0)=0, g'()>0 \end{cases}$$

其中 f, g 均为先验的理性系统，讨论均衡点 (Y^*, r^*) 的存在性、唯一性和稳定性。此外，对应于 *IS-LM* 的三种形式，我们同时可以假定 Y 外生，则相应的动力系统表示为

$$\begin{cases} \dot{P}_t = f(C(Y_t - T) + I(r_t) + G - Y_t), f(0)=0, f'()>0 \\ \dot{r}_t = g(m(r_t, Y_t) - \frac{M_t}{P_t}), g(0)=0, g'()>0 \end{cases}$$

以 P 外生给定的 *IS-LM* 为例，均衡点表示为：

$$\begin{cases} C(Y^* - T) + I(r^*) + G - Y^* = 0 \\ m(r^*, Y^*) - \frac{M_t}{P_t} = 0 \end{cases}$$

首先，定义了理性系统的选择函数，存在唯一的均衡点 (Y^*, r^*)；其次，在均衡点处线性化展开得到

$$\begin{pmatrix} \dot{Y}_t \\ \dot{r}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(0)(c'-1) & f'(0)I'(r^*) \\ g'(0)m_y & g'(0)m_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_t - Y^* \\ r_t - r^* \end{pmatrix}$$

定义线性化系数矩阵的特征根为 λ_1, λ_2，则有 $\lambda_1\lambda_2 = det(A) > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = trac(A) < 0$，可知 λ_1, λ_2 均小于零，该动力系统的均衡点是完全稳定的。

2.3.3 二维离散动力系统

以离散的 *Ramsey Model* 为例，讨论二维离散动力系统均衡点的存在性、唯一性和稳定性问题：给定标准的中央计划者离散 *Ramsey Model*（简单起见，假定人口增长率为 0，即 $n=0$，当 $n\neq 0$ 时可以通过人均化进行处理）：

$$\sum \beta^t u(c_t)$$
$$k_{t+1} \leq k_t + f(k_t) - c_t$$

构造 *Lagrange* 函数有

$$\mathcal{L} = \sum \beta^t u(c_t) + \sum \lambda_t [k_t + f(k_t) - c_t - k_{t+1}]$$

一阶条件可以得到

$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = \beta^t u'(c_t) - \lambda_t = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial k_t} = \lambda_t(1 + f'(k_t)) - \lambda_{t-1} = 0$$

因此均衡的储蓄和消费由以下动力系统决定

$$\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}[1 + f'(k_{t+1})] = 0$$
$$k_{t+1} = k_t + f(k_t) - c_t$$
$$\lim \lambda_t k_t = 0 \to \lim \beta^t u'(c_t) k_{t+1} = 0$$

下面讨论均衡点的性质[9]，给定该动力系统的均衡点为 $(\bar{c}, \bar{k})$，均衡情况下该动力系统转化为：

$$\beta(1 + f'(\bar{k})) = 1$$
$$f(\bar{k}) = \bar{c}$$

考虑到 $f(k)$ 为新古典生产函数，$f(k), f'(k)$ 均为单调函数，因此必然可以唯一确定均衡解 $(\bar{c}, \bar{k})$。接下来我们讨论该均衡点的稳定性：首先将 *Euler* 方程在均衡点 $(\bar{c}, \bar{k})$ 处线性展开，考虑到 $c_t = k_t + f(k_t) - k_{t+1}$，我们将其转换为关于 k_t 的一维动力系统，可以得到

$$\begin{aligned} -u''(\bar{c})((1 + f'(\bar{k}))(k_t - \bar{k}) - (k_{t+1} - \bar{k})) + \beta f''(\bar{k}) u'(\bar{c})(k_{t+1} - \bar{k}) + \\ \beta(1 + f'(\bar{k}) u''(\bar{c})((1 + f'(\bar{k}))(k_{t+1} - \bar{k})) - (k_{t+2-\bar{k}})) = 0 \end{aligned}$$

化简得到

$$-\beta^{-1} u''(\bar{c})(k_t - \bar{k}) + [(1 + \beta^{-1}) u''(\bar{c}) + \beta f''(\bar{k}) u'(\bar{c})](k_{t+1} - \bar{k}) - u''(\bar{c})(k_{t+2} - \bar{k}) = 0$$

转换为矩阵形式我们得到：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} k_{t+2} - \bar{k} \\ k_{t+1} - \bar{k} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 + \beta^{-1} + \frac{f''(\bar{k})/(1+f'(\bar{k}))}{u''(\bar{c})/u'(\bar{c})} & -\beta^{-1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{t+1} - \bar{k} \\ k_t - \bar{k} \end{bmatrix} \\ &= A \begin{bmatrix} k_{t+1} - \bar{k} \\ k_t - \bar{k} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

[9] 在这里给出了一种处理方式，即全部转化为关于 k_t 的二阶离散动力系统，从而讨论系统均衡点的稳定性；另一种方法就是按照 (c_t, k_t) 的方式讨论二维离散动力系统的线性展开系统，构造 $(c_{t+1} - \bar{c}, k_{t+1} - \bar{k})$ 和 $(c_t - \bar{c}, k_t - \bar{k})$ 的关系，利用矩阵进行处理。

该一维动力系统的稳定性取决于矩阵 A 的特征根情况。线性方程组对应的特征方程表示为：

$$h(\lambda)=\lambda^2-(1+\beta^{-1}+\frac{f''(\bar{k})/(1+f'(\bar{k}))}{u''(\bar{c})/u'(\bar{c})})\lambda+\beta^{-1}$$

现在我们需要判定特征方程根的情况。$h(0)=\beta^{-1}>0, h(1)=-\frac{f''(\bar{k})/(1+f'(\bar{k}))}{u''(\bar{c})/u'(\bar{c})}<0, \lim_{\lambda\to\infty}h(\lambda)=+\infty$，根据介值定理可以确定该特征方程存在两根 $\lambda_1\in(0,1), \lambda_2\in(1,+\infty)$，因此，该均衡点是鞍点稳定的。

讨论上述二维离散动力系统的相位图：首先讨论 k_t 的分界线

$$k_{t+1}-k_t\ge 0\Rightarrow f(k_t)-c_t\ge 0\Rightarrow c_t\le f(k_t)$$

因此在 (c_t,k_t) 平面内，$c_t=f(k_t)$ 将 k_t 的变化分为两部分，当 $c_t\le f(k_t)$ 时，$k_{t+1}-k_t\ge 0$；当 $c_t\ge f(k_t)$ 时，$k_{t+1}-k_t\le 0$。其次我们讨论 c_t 的分界线

$$\begin{aligned}
c_{t+1}-c_t\ge 0 &\Rightarrow \beta u'(c_{t+1})\le \beta u'(c_t)\\
&\Rightarrow \frac{u'(c_t)}{1+f'(k_{t+1})}\le \beta u'(c_t)\\
&\Rightarrow 1\le \beta(1+f'(k_{t+1}))\\
&\Rightarrow \beta(1+f'(\bar{k}))\le \beta(1+f'(k_{t+1})), f''(k_t)\le 0\\
&\Rightarrow k_{t+1}\le \bar{k}\\
&\Rightarrow f(k_t)+k_t-c_t\le \bar{k}\\
&\Rightarrow c_t\ge f(k_t)+k_t-\bar{k}
\end{aligned}$$

因此在 (c_t,k_t) 平面内，$c_t=f(k_t)+k_t-\bar{k}$ 将 c_t 的变化分为两部分，当 $c_t\ge f(k_t)+k_t-\bar{k}$ 时，$c_{t+1}\ge c_t$；当 $c_t\le f(k_t)+k_t-\bar{k}$ 时，$c_{t+1}\le c_t$。据此可以画出该二维动力系统的相位图：

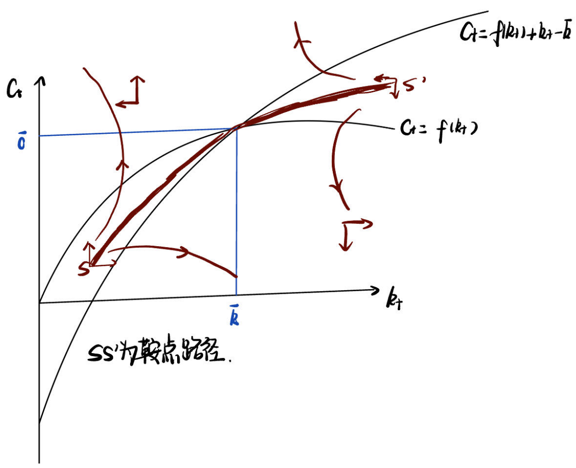


图 2: 离散 *Ramsey Model* 相位图

2.4 三维与高维动力系统

2.4.1 三维连续动力系统

给定标准的三维动力系统

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x,y,z)\\ \dot{y}=g(x,y,z)\\ \dot{z}=h(x,y,z)\\ \quad x_0,y_0,z_0\end{cases}\underbrace{\to}_{steady\ state}\begin{cases}\dot{x}=f(x^*,y^*,z^*)=0\\ \dot{y}=g(x^*,y^*,z^*)=0\\ \dot{z}=h(x^*,y^*,z^*)=0\end{cases}$$

对于三维的线性动力系统，可以直接根据特征根讨论均衡点 (x^*, y^*, z^*) 的性质；对于三维的非线性动力系统，可以将其转化为均衡点附近的线性化展开系统讨论均衡点的稳定性：

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x^*,y^*,z^*) & f_y(x^*,y^*,z^*) & f_z(x^*,y^*,z^*) \\ g_x(x^*,y^*,z^*) & g_y(x^*,y^*,z^*) & g_z(x^*,y^*,z^*) \\ h_x(x^*,y^*,z^*) & h_y(x^*,y^*,z^*) & h_z(x^*,y^*,z^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t - x^* \\ y_t - y^* \\ z_t - z^* \end{pmatrix}$$

定义上述非线性动力系统在均衡点附近线性化系统的系数矩阵为 A，特征根为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$，下面讨论特征根的性质进而讨论均衡点的稳定性质。

1. 如果 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 均小于零，则该系统为完全稳定系统；

2. 如果 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 均大于零，则该系统为不稳定系统；

3. 如果 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 两负一正或者两正一负，收敛需要保证正数根系数为 0，从而仅保留负根，这就要求负数根的个数需要与初始条件个数相等，此时系统是稳定的。例如 $x_t = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 e^{\lambda_3 t}$，假定 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$，则为了保证收敛必须保证 $c_1 = c_2 = 0$，因此只需要给出 c_3 一个初始条件便能够确定动力系统的稳定性。三维系统中稳定性判别方式给定如下：

> 假定特征根有正有负，如果负数根的个数等于初始条件个数，则存在唯一的鞍点稳定路径；如果负数根的个数大于初始条件个数，则存在多个鞍点稳定路径；如果负数根的个数小于初始条件个数，则该系统不稳定；

注意到，从一维到二维需要引入鞍点稳定，从二维到三维需要根据初始条件决定鞍点稳定路径的个数。三维以上高微系统的稳定性判别也是根据负数根的个数与初始条件个数的关系加以处理。

2.4.2 高维动力系统

低维动力系统的完全稳定性与单一鞍点稳态路径与现实中存在较大出入，对于多均衡、多收敛路径的讨论存在诸多限制，这就必然要求讨论更高阶、更高维度的动力系统，例如 *Lucas*（*1089JME*）等将人力资本引入增长模型，考察四维动力系统的稳定性问题。从低维走向高维，典型特征是出现了**不定性（*indeterminacy*）问题**，即经济增长存在多个均衡点，这表明初始条件不同会收敛到不同的均衡点上面；除了具有不同的均衡点，也会存在不同的收敛路径，这表明即使存在相同的均衡点，具体的收敛路径也是存在差异性的，从而不同国家之家的增长跨国差异无法解释为简单的比较收敛和绝对收敛。从低维到高维的动力系统中，鞍点路径种类更加丰富，多均衡、多路径更加贴合显示。

给定基本的判别条件：*高维动力系统中负特征根个数（离散系统中为特征根小于 1 的个数）等于初始条件个数，表明存在唯一的收敛路径*[10]。

为了判别高维动力系统特征根的符号，给出 *Routh-Hurwitz* 定理，该定理给出了高阶多项式特征根正负个数的判别方式：给定高阶多项式

$$A_n \lambda^n + A_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + A_1 \lambda + A_0 = 0$$

构造 RH 矩阵，如果 n 为奇数，则有

$$\mathcal{RH} = \begin{pmatrix} A_n & A_{n-2} & \dots & A_3 & A_1 \\ A_{n-1} & A_{n-3} & \dots & A_2 & A_0 \end{pmatrix}$$

如果 n 为偶数，则有

$$\mathcal{RH} = \begin{pmatrix} A_n & A_{n-2} & \dots & A_2 & A_0 \\ A_{n-1} & A_{n-3} & \dots & A_1 & 0 \end{pmatrix}$$

[10] *Blanchard(1980ECMA)* 给出了判定解的稳定性的 *BK* 条件.

进一步的根据矩阵形式得到（以 n 为奇数为例）

$$\mathcal{RH}=\begin{pmatrix} A_n & A_{n-2} & \dots & A_3 & A_1 \\ A_{n-1} & A_{n-3} & \dots & A_2 & A_0 \\ z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1,n-1} & z_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n+1,1} & z_{n+1,2} & \dots & z_{n+1,n-1} & z_{n+1,n} \end{pmatrix}$$

其中定义如下运算形式:

$$z_{11}=-\frac{\begin{bmatrix} A_n & A_{n-2} \\ A_{n-1} & A_{n-3} \end{bmatrix}}{A_{n-1}}$$

即 z_{11} 表示对应的第 1 和第 2 列多项式系数矩阵的行列式负数与其对应的上一个系数 A_{n-1} 的比值，依次类推，最终 $z_{n+1,1}$ 等于 A_0 的时候停止，考察第一列元素 $(A_n, A_{n-1}, z_{11}, \dots, z_{n+1,1})$，其中符号变化次数等于该多项式正的特征根的个数，例如 $n=1$，正负号变化 7 次，则具有 7 个正根和 3 个负根，给定初始条件个数，可以判定系统的稳定性以及鞍点路径的个数。

2.5 随机动力系统

2.5.1 随机过程与 *Ito* 公式

对于函数 $y=f(z,t)$，如果 z 为确定的，则微分得到 $dy=f_z dz+f_t dt$；如果 z 服从布朗运动，则根据全微分定义[11]得到

$$\begin{aligned} dy &= f(z+dz,t+dt)-f(z,t) \\ &= f(z,t)+f_z dz+f_t dt+\frac{1}{2}f_{zz}(dz)^2+\frac{1}{2}f_{tt}(dt)^2+f_{zt}(dzdt)+o(dt)-f(z,t) \end{aligned}$$

根据 $dzdt=dtdt=0, dzdz=dt$ 可知

$$dy=f_z(z,t)dz+f_t(z,t)dt+\frac{1}{2}f_{zz}(z,t)dt+o(dt)$$

case: 给定如下几何布朗运动过程，确定微分 dy，其中 $y(t)=e^{(a-\frac{1}{2}b^2)t+bz}$；根据上述定义可以导出

$$dy(t)=ay(t)dt+by(t)dz$$

其中 $dA/A=xdt+\sigma dz$ 的形式为几何布朗运动过程，积分得到 $A(t)=A_0e^{(x-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma z}$。

进一步的，给定复合随机微分，定义 $y=f(x_t,t)$，其中 $dx_t=a(x_t)dt+\sigma(x_t)dz$，根据定义得到

$$\begin{aligned} dy &= f(x+dx,t+dt)-f(x,t) \\ &= f_x dx+f_t dt+\frac{1}{2}f_{xx}(dx)^2+\frac{1}{2}f_{tt}(dt)^2+f_{xt}(dzdt)+o(dt) \end{aligned}$$

为了确定微分形式，需要进一步确定 dx 的具体形式，其中

$$(dx)^2=(a(x_t)dt+\sigma(x_t)dz)^2=\sigma^2(x_t)dt, dx_t dt=0$$

化简上述形式得到

$$\begin{aligned} dy &= f_x(a(x_t)dt+\sigma(x_t)dz)+f_t dt+\frac{1}{2}f_{xx}\sigma^2(x_t)dt \\ &= [f_x a(x_t)+f_t+\frac{1}{2}f_{xx}\sigma^2(x_t)]dt+f_x\sigma(x_t)dz \end{aligned}$$

[11]随机微积分的导出要点：一是表示为微分的基本形式，根据泰勒公式展开得到；二是随机过程涉及到二阶微分，因此线性展开需要到二阶；

2.5.2 随机增长模型（*Merton，1972JET*）

假定人口增长具有不确定性，即人口增长服从几何布朗运动 $dP/P = ndt + \sigma dz$，其中期望人口增长率为 $E(dP/P) = n$，人口增长方差为 $var(dP/P) = \sigma^2$，*Solow Model* 的其他假定保持不变，劳动供给依旧是总人口的固定比例，总量积累方程表示为

$$\begin{aligned}
\dot{K} &= sF(K, L) - \delta K \\
dL &= nLdt + \sigma Ldz \\
&K_0, L_0
\end{aligned}$$

下面导出人均增长模型，根据定义得到[12]

$$\begin{aligned}
dk &= d(K/L) = d\phi(K, L) = \phi(K + dK, L + dL) - \phi(K, L) \\
&= \phi_K dK + \phi_L dL + \frac{1}{2}\phi_{KK}(dK)^2 + +\frac{1}{2}\phi_{LL}(dL)^2 + \phi_{KL}(dKdL) + o(dt)
\end{aligned}$$

其中 $dK = (sF(K, L) - \delta K)dt, dL = nLdt + \sigma Ldz$，根据随机微分运算法则可以得到

$$dKdK = dKdL = 0, (dL)^2 = \sigma^2 L^2 dt$$

化简得到

$$dk_t = (sf(k_t) - (n + \delta)k_t + k_t\sigma^2)dt - \sigma k_t dz_t$$

如果给定生产函数的形式为 $y = Ak$, 则人均资本积累动态简化为

$$dk_t = (sA - (n + \delta) + \sigma^2)k_t dt - \sigma k_t dz_t$$

服从几何布朗运动过程，积分得到

$$k_t = k_0 e^{[sA-(n+\delta)+\sigma^2-\frac{1}{2}\sigma^2]t-\sigma z} = k_0 e^{[sA-(n+\delta)+\frac{1}{2}\sigma^2]t-\sigma z}$$

假定引入技术进步的随机性，即 $dA = xAdt + \sigma Adz$，人口增长 $dP = nPdt$，相应的有效人均资本 $\hat{k}_t$ 积累过程表示为

$$d\hat{k}_t = (sf(\hat{k}) - (n + x + \delta)\hat{k}_t + \sigma^2\hat{k}_t)dt - \sigma\hat{k}_t dz_t$$

2.5.3 随机动力系统的稳定性

对于随机动力系统，以 *Solow Model* 为例：

$$dk_t = (sf(k_t) - (n + \delta)k_t + k_t\sigma^2)dt - \sigma k_t dz_t, k_0$$

当生产函数具备特殊形式时存在显式解，求解随机微分方程可以得到显示资本积累动态路径；如果不存在显式解，则需要根据随机动力系统确定解的稳定性；考虑到在随机动力系统中，均衡表示为随机变量分布函数收敛到稳定水平，因此在随机动力系统中考察稳定分布的存在性质。定义稳定分布：

$$\forall k_0, \pi_{k_0} \to \pi_{k(\infty)}$$

其中 $\pi_{k(\infty)}$ 表示稳定分布，下面依次分析稳定分布的存在性、唯一性以及求解方法。下面给出**柯尔莫哥洛夫定理（*Kolmogorov Theorem*）**：

[12]定义函数 ϕ 是为了简便运算；

假定 $dx_t = b(x_t)dt + (a(x_t))^{1/2}dz_t$，在 $a(x_t), b(x_t)$ 满足条件时，稳定分布 $\pi_{k(\infty)}$ 存在;

但是，一般情况下稳定分布积分是超越函数，难以直接求解显式解，因而需要退而求其次选择数值解方法进行处理。

将上述问题转化为离散形式问题从而确定数值解,定义 $\{x_t\}_0^\infty$ 服从离散时间的随机过程,定义 *Markov* 过程，即

$$prob(x_t|x_1, \ldots, x_{t-1}) = prob(x_t|x_{t-1})$$

上述过程表明第 t 期的选择概率只与上一期 $t-1$ 的信息有关。一个 *Markov* 过程仅由如下部分决定：一是状态 x_t；二是初始分布 π_0，即初始状态下各种状态的概率分布；三是状态转移矩阵，定义 $p_{ij} = prob(x_i = \bar{x}_j|x_{t-1} - \bar{x}_i)$，表示从 j 到 i 状态转移的概率。定义状态转移矩阵

$$P = (P_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} P_{11} & \ldots & P_{1n} \\ & \ldots & \\ P_{n1} & \ldots & P_{nn} \end{pmatrix}$$

其中 $\sum_j P_{ij} = 1$。

Block-Mirman(1972JET) 在 *Markov* 过程下证明了稳定分布的存在性以及求解问题：第一，对于任意的 i, j，均有 $P_{ij} > 0$ 严格成立，则稳定分布存在，这表明遍历状态转移矩阵的每个元素均严格为正，则可以确定稳定分布存在，从而可以利用稳定分布进行比较静态分析[13]；第二，已知稳定分布存在，则根据状态转移关系 $\pi_t = (P^T)t\pi_0 = (P^T)\pi_{t-1}$，因此在稳定分布情况下得到 $(I - P^T)\pi_\infty = 0$，因此 P^T 是稳定分布的单位特征根对应的特征向量，据此可以确定稳定分布[14]。

2.5.4 线性化方法

给定人口增长不确定的随机增长模型，其中 $dP/P = ndt + \sigma dz$，离散时间下表示为

$$\frac{P_{t+1}}{P_t} = 1 + n_t$$

其中 $\{n_t\}_0^\infty$ 服从随机过程，具体可以表示为如下三种形式：

1. $\frac{n_{t+1}}{\bar{n}} = (\frac{n_t}{\bar{n}})^\theta e^{u_t}$，其中 u_t 表示白噪声，对数化表示为 $logn_{t+1} - log\bar{n} = \theta(logn_t - log\bar{n}) + u_t$;
2. $n_{t+1} = n_t^\theta e^{u_t}$，对数化表示为 $logn_{t+1} = \theta logn_t + u_t$，其中 u_t 为白噪声;
3. $n_{t+1} = \bar{n}e^{u_t}$，对数化表示为 $logn_{t+1} = \log\bar{n} + u_t$，满足随机游走过程;

离散 *Solow Model* 的人均资本积累动态给定为: 假定存在技术进步的随机冲击，$dA_t/A_t = xdt + \sigma dz$

$$k_{t+1} = \frac{sf(k_t) + k_t - \delta k_t}{1 + n_t}$$

均衡状态下，不存在外部的随机冲击 $A_t = \bar{A}$，从而均衡状态表示为

$$k_{t+1} = k_t = k^* \to sf(k^*, \bar{A}) = (n + \delta)k^*$$

根据新古典生产函数的性质可知，存在唯一的 k^*。为处理该离散时间非线性动力系统的稳定性问题，将该上述系统进行对数线性化。

定义对数线性化过程:

$$\hat{x}_t = \frac{x_t - \bar{x}}{\bar{x}}$$

[13]弱化定理：存在 k，使得 $(P_{ij})^k$ 严格为正，则稳定分布存在;

[14]求解思路如下：根据 $\pi_t = (P^T)t\pi_0 = (P^T)\pi_{t-1}$ 可以求解线性齐次方程组，同时满足 $\sum \pi_i = 1$，从而可以确定稳定分布 π_∞。

其中 $\bar{x}$ 为均衡状态下的取值或者期望值，为了理解对数线性化过程，做如下转换：

$$\hat{x}_t = \frac{x_t - \bar{x}}{\bar{x}} = \frac{\Delta x_t}{\bar{x}} = \frac{dlnx_t}{dt}|_{\bar{x}} = \frac{\Delta lnx_t}{\Delta x_t}|_{\bar{x}}$$

上述过程清晰地表明 $\hat{x}_t$ 可以表示为对数处理过程从而将其线性化，但是该种对数线性化处理方法相当繁琐，不方便处理。

引入 ***Uhlig* 方法：**

$$\hat{x}_t = \frac{x_t - \bar{x}}{\bar{x}} = \frac{x_t}{\bar{x}} - 1$$
$$\rightarrow \frac{x_t}{\bar{x}} = 1 + \hat{x}^t \rightarrow x_t = (1 + \hat{x}_t)\bar{x} = \bar{x}e^{\hat{x}_t}$$

其中最后一步采用近似等式 $e^x = 1 + x$，所有变量使用 $x_t = \bar{x}e^{\hat{x}_t}$ 进行替代。

假定生产函数为 CD 形式，即 $f(k_t) = A_t k_t^{\alpha}$，假定技术进步满足随机过程 $A_t = \bar{A}e^{u_t}$。均衡状态下不存在外部技术冲击，$A_t = \bar{A}$，因此均衡状态表示为

$$\bar{k} = \frac{sA\bar{k}^{\alpha} + (1-\delta)\bar{k}}{1+n}$$

下面采用对数线性化方法将其转化为线性系统进行处理：利用 $x_t = \bar{x}e^{\hat{x}_t}$ 进行代换

$$\bar{k}e^{\hat{k}_{t+1}} = \frac{1}{1+n}[s\bar{A}e^{u_t}(\bar{k}e^{\hat{k}_t})^{\alpha} + (1-\delta)\bar{k}e^{\hat{k}_t}]$$
$$\rightarrow e^{\hat{k}_{t+1}} = \frac{1}{1+n}[s\bar{A}e^{u_t + \alpha\hat{k}_t}\bar{k}^{\alpha-1} + (1-\delta)e^{\hat{k}_t}]$$

进一步利用等式 $e^x = 1 + x$ 进行代换，得到

$$(1 + \hat{k}_{t+1}) = \frac{1}{1+n}[s\bar{A}\bar{k}^{\alpha-1}(1 + u_t + \hat{k}_t) + (1-\delta)(1 + \hat{k}_t)]$$
$$\rightarrow \hat{k}_{t+1} = [\frac{s\alpha\bar{A}\bar{k}^{\alpha-1} + (1-\delta)}{1+n}]\hat{k}_t + \frac{s\bar{A}\bar{k}^{\alpha}}{1+n}u_t$$

对数线性化后可以得到 $\hat{k}_{t+1} = B\hat{k}_t + Du_t$ 的线性化系统，该动力系统的稳定性可以通过一维离散动力系统方法加以确定。

***Case*：** 给定如下随机的 *Solow* 增长模型：

$$k_{t+1} = \frac{sAk_t^{\alpha} + (1-\delta)k_t}{1+n_t}$$
$$n_{t+1} = \bar{n}e^{u_t}$$

其中 k_0 给定，对数线性化该方程。

考虑到 $k_t = \bar{k}e^{\hat{k}_t}$，代入 *Solow* 模型可以得到

$$\bar{k}e^{\hat{k}_{t+1}} = \frac{sA\bar{k}^{\alpha}e^{\alpha\hat{k}_t} + (1-\delta)\bar{k}e^{\hat{k}_t}}{1+\bar{n}e^{u_t}}$$
$$(1+\bar{n}e^{u_t})\bar{k}e^{\hat{k}_{t+1}} = sA\bar{k}^{\alpha}e^{\alpha\hat{k}_t} + (1-\delta)\bar{k}e^{\hat{k}_t}$$

使用 $e^x = 1 + x$ 做近似转换，同时左右两侧同时消去 $\bar{k}_t$，得到

$$(1+\bar{n}) + (1+\bar{n})\hat{k}_{t+1} + \bar{n}u_t = sA\bar{k}^{\alpha-1}(1+\alpha\hat{k}_t) + (1-\delta)(1+\hat{k}_t)$$

在 *Steady State* 中我们有 $sA\bar{k}^{\alpha-1} = (\bar{n}+\delta)$，化简得到

$$\hat{k}_{t+1} = \frac{s\alpha A\bar{k}^{\alpha-1} + (1-\delta)}{1+\bar{n}}\hat{k}_t + \frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}u_t$$
$$= M\hat{k}_t + Bu_t$$

其中，根据 *steady state* 可知 $M = \frac{s\alpha A\bar{k}^{\alpha-1}+(1-\delta)}{1+\bar{n}} < 1$。该线性差分方程的解表示为

$$\hat{k}_t = CM^t + \sum_i M^i B^i u_{t-i}$$

其中 C 为常数。进一步的，我们确定 y_t 的对数线性化形式：给定 $y_t = Ak_t^\alpha$

$$\bar{y}e^{\hat{y}_t} = A(\bar{k}e^{\hat{k}_t})^\alpha$$
$$\bar{y}(1+\hat{y}_t) = A\bar{k}^\alpha(1+\alpha\hat{k}_t)$$

移除稳态项 $\bar{y} = A\bar{k}^\alpha$，可以得到

$$\hat{y}_t = \alpha\hat{k}_t{}^{15}.$$

[15]考虑到此处的随机冲击来自于人口而非技术，因而 $\hat{y}_t$ 和 $\hat{k}_t$ 具有形式上的一致性。如果随机冲击来自于生产技术，两者存在差别。

3 静态与离散动态优化：*Lagrange* 与 KT 方法

Lagrange 方法适用于静态约束优化问题以及部分动态优化问题，尤其适用于离散确定性问题；离散不确定性问题尽管 *Lagrange* 结合包络引理在处理上较为方便，但是并不严谨，需要借助动态规划的方法给出严格证明。

3.1 无约束优化问题

给定标准的无约束优化问题

$$max(min)\ f(x),\ x \in C$$

定义 x^* 是该优化问题的极值点，即对于最优值 x^* 领域内任意的 $x \in U_\delta(x^*)$，有 $f(x) \le (\ge) f(x^*)$ 恒成立。对于极值点的求解问题，需要明确必要性和充分性条件：一是 x^* 是最优解需要满足何种条件（必要性条件）；二是 x^* 满足何种条件才是优化问题的最优解（充分性条件）。

给定最优解的必要性条件（扰动法）：给定 x^* 以及任意扰动 ε，比较 $f(x^*+\varepsilon), f(x^*)$ 的大小关系，其中需要保证扰动 ε 在可行解范围内。定义扰动的可行方向，如果 $x^* \in C$ 是可行解，$d \in R^n$ 是 x^* 的可行方向，若存在 $\bar{\alpha} > 0$，对于任意的 $\alpha \in [0, \bar{\alpha}]$, 有 $x^* + d\alpha \in C$，此时 d 是可行的扰动方向。该定义的实际含义在于：内点可以沿着任意方向扰动，而边界点则存在方向扰动问题，需要明确扰动的具体方向属于可行解范围内。

***Lemma*：最优解的必要性条件**：如果 x^* 是极大值点，可定方向 $d \in R^n$，则有 $\bigtriangledown^T f(x^*) d \le 0$。

Proof: 考虑到 x^* 是极大值点，相应的可行扰动 $x^* + d\alpha \in C$ 也是可行解，满足 $f(x^*) \ge f(x^* + d\alpha)$，将 $f(x^* + d\alpha)$ 在最优解处线性化展开得到

$$\begin{aligned} & f(x^* + d\alpha) = f(x^*) + \bigtriangledown^T f(x^*)(d\alpha) + o(d\alpha) \le f(x^*) \\ \rightarrow & \alpha \bigtriangledown^T f(x^*) d \le 0 \end{aligned}$$

考虑到 $\alpha \in [0, \bar{\alpha}]$，因此有 $\bigtriangledown^T f(x^*) d \le 0$。该定理表明，如果 x^* 是最优解，则沿着任意方向扰动的函数梯度都是下降的。

进一步的可以给出如下**引理**：如果 x^* 是 C 的内点极值点，则有 $\bigtriangledown^T f(x^*) = 0$，即常见的一阶优化条件。容易理解，如果 x^* 是内点解，在可行的扰动方向 d 是任意的，为了满足不等式 $\bigtriangledown^T f(x^*) d \le 0$，必然有 $\bigtriangledown^T f(x^*) = 0$。

基于此，无约束优化问题的最优解表示为：

$$\bigtriangledown^T f(x^*) d \le 0; \bigtriangledown^T f(x^*) = 0\ if\ x^*\ is\ inner\ solution$$

3.2 约束优化问题

定义标准的约束优化问题：

$$max\ f(x)\ s.t.\ g(x) = 0$$

定义 *Lagrange* 函数

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x) \rightarrow \bigtriangledown^T L(x, \lambda) = 0$$

经济学中更常见的形式是混合约束优化问题：

$$max\ f(x)\ s.t.\ g(x) = 0, h(x) \ge 0, x_i \ge 0$$

定义 *Lagrange* 函数

$$L(x,\lambda) = f(x) + \lambda g(x) + \mu h(x) + \sum_i w_i x_i$$

其中 λ, μ, w_i 是 *Lagrange* 乘子，分别表示放松约束条件的影子价格。

Lemma：如果 x^* 是该优化问题的最优解，且满足相容性条件，则存在 λ^*, μ^*, w_i^* 满足：

- 最优化条件：$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$；
- 可行性条件：$g(x^*) = 0, h(x^*) \geq 0$；
- 互补松弛条件：$\mu^* \geq 0, h(x^*) \geq 0, \mu^* h(x^*) = 0; x_i^* \geq 0, w_i^* \geq 0, w_i^* x_i^* = 0$；

3.2.1 Case：静态约束优化问题

给定如下标准的效用最大化问题

$$\begin{aligned} max\ u &= \alpha x_1 + \beta x_2 \\ s.t.\ p_1 x_1 + p_2 x_2 &\leq m, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

定义 *Lagrange* 函数

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda, w_1, w_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 + \lambda(m - p_1 x_1 - p_2 x_2) + w_1 x_1 + w_2 x_2$$

其中，λ, w_1, w_2 为 *Lagrange* 乘子，λ 表示收入 m 的影子价格。最优性条件表示为：

- 一阶条件：$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \alpha - \lambda p_1 + w_1 = 0; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \beta - \lambda p_2 + w_2 = 0$
- 松弛条件：$\lambda \geq 0; m - p_1 x_1 - p_2 x_2 \geq 0; \lambda(m - p_1 x_1 - p_2 x_2) = 0$
- 松弛条件：$w_1 \geq 0, x_1 \geq 0, w_1 x_1 = 0;\ w_2 \geq 0, x_2 \geq 0, w_2 x_2 = 0$

给定一阶条件，可以得到 $\lambda = (\alpha + w_1)/p_1 > 0$，根据松弛条件，$p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$。对于 x_1, x_2 的取值进行如下讨论：

- 假定 $x_1 > 0$，相应的根据松弛条件可以得到 $w_1 = 0, \lambda = \alpha/p_1$，相应的 $w_2 = \lambda p_2 - \beta = p_2(\frac{\alpha}{p_1} - \frac{\beta}{p_2})$。如果 $w_2 > 0, \frac{\alpha}{\beta} > \frac{p_1}{p_2}$，根据松弛条件可以得到 $x_2 = 0$，$x_1 = \frac{m}{p_1}$。
- 假定 $x_2 > 0$，相应的根据松弛条件可以得到 $w_2 = 0, \lambda = \beta/p_2$，相应的 $w_1 = \lambda p_1 - \alpha = p_1(\frac{\beta}{p_2} - \frac{\alpha}{p_1})$。如果 $w_1 > 0, \frac{\alpha}{\beta} < \frac{p_1}{p_2}$，根据松弛条件可以得到 $x_1 = 0$，$x_2 = \frac{m}{p_2}$。
- 考虑到 $w_1 = w_2 = 0$，根据松弛条件有 $x_1 > 0, x_2 > 0, \frac{\alpha}{\beta} = \frac{p_1}{p_2}$。此时根据松弛条件可以得到解为 $\{(x_1, x_2) | p_1 x_1 + p_2 x_2 = m\} = (t\frac{m}{p_1}, (1-t)\frac{m}{p_2}), \forall t \in (0,1)$.

综上，给出线性效用函数的解：

$$(x_1, x_2) = \begin{cases} (\frac{m}{p_1}, 0) & \frac{\alpha}{\beta} > \frac{p_1}{p_2} \\ (0, \frac{m}{p_2}) & \frac{\alpha}{\beta} < \frac{p_1}{p_2} \\ (t\frac{m}{p_1}, (1-t)\frac{m}{p_2}) & \frac{\alpha}{\beta} = \frac{p_1}{p_2}, t \in (0,1) \end{cases}$$

3.2.2 *Lagrange* 乘子的经济含义

定义最优化问题的值函数

$$V(a) = max\ f(x,a)\ s.t.\ g(x,a) = 0$$

给定包络定理得到

$$\frac{\partial V(a)}{\partial a} = \frac{\partial L}{\partial a}$$

其中 L 为约束优化问题对应的 *Lagrange* 函数。如果约束转化为 $g(x) = b$，相应的 *Lagrange* 乘子 λ 表示 b 的边际值，即 b 变化一单位最优值相应的改变多少，可以理解为 b 的影子价格。

Proof: *Lagrange* 函数给定为

$$L = f(x,a) + \lambda[g(x,a) - b]$$

根据最优化条件可知

$$f_x + \lambda g_x = 0 \rightarrow x = x(a), \lambda = \lambda(a)$$

定义值函数 $V(a) = maxf(x,a)$，$s.t.\ g(x,a) = b$，可知

$$\begin{aligned} &V'(a) = f_x x'(a) + f_a(x,a) = -\lambda g_x x'(a) + f_a = 0 \\ &g(x(a),a) = b \rightarrow g_x x'(a) + g_a = 0 \end{aligned}$$

联立可得

$$V'(a) = f_a + \lambda f_a = \frac{\partial L}{\partial a}$$

例如给定标准的效用最大化问题：

$$V(p,m) = max\ u(x)\ s.t.\ px \leq m$$

其中 *Lagrange* 乘子 λ 表示收入 m 的边际值，即 m 变化一单位最大效用变化的程度。给定 *Lagrange* 方程：

$$L = u(x) + \lambda(m - px)$$

根据包络引理可知：$\frac{\partial V}{\partial m} = frac\partial L\partial m = \lambda$，即 λ 表示收入 m 的边际值。

3.3 离散时间确定性动态优化问题

3.3.1 有限期的离散时间动态优化问题

给定标准的 *Cake-Eating model*（最基本的跨期离散选择问题）：

$$\begin{aligned} &max\ \sum_t \beta^t u(c_t) \\ &\quad s.t.\ k_1 \leq k_0 - c_0, \ldots, k_{T+1} \leq k_T - c_T \end{aligned}$$

消费者的目标是最优化跨期消费的效用函数，约束条件表示资本 $k(t)$ 的积累路径，来自于上期资本减去消费后的剩余储蓄。定义 *Lagrange* 函数：

$$L = \sum_t \beta^t u(c_t) + \sum_t \lambda_t(k_t - c_t - k_{t+1})$$

其中 λ_t 是 *Lagrange* 乘子，表示第 $t+1$ 期资本存量 k_{t+1} 的边际值。最优解满足如下条件：

$$\begin{aligned}[c_t] :&\beta^t u'(c_t) = \lambda_t \\ [k_t] :&\lambda_t - \lambda_{t-1} = 0 \\ [\lambda_t] :&k_t - c_t - k_{t+1} = 0\end{aligned}$$

Euler 方程表示为

$$\beta u'(c_{t+1})/u'(c_t) = 1$$

其经济含义是一单位资本用来消费获得的边际效用 $u'(c_t)$ 和用来储蓄到下一期消费的贴现边际效用 $\beta u'(c_{t+1})$ 相等，此时得到跨期优化问题的最优解。但是注意到，在该问题中互补松弛条件表示为

$$\lambda_t \geq 0, k_t - c_t - k_{t+1} \geq 0, \lambda_t[k_t - c_t - k_{t+1}] = 0$$

同时对于 k_T 的一阶条件满足：$-\lambda_T = 0$，即 $\lambda_T = \beta^T u'(c_T) = 0$，这意味着 c_T 无穷大从而使得 $u'(c_T)$ 趋近于零，此时个体可以无限消费，相应的可以通过无限借贷扩大 k_t，在这种情况下经济中存在无限借贷、无限消费与无限效用的情形。为了在的模型中排除上述情形，必须对于终止时刻的资本存量进行限制，例如 $k_T \geq 0$。给定重新定义良好的消费者跨期选择问题：

$$L = \sum_t \beta^t u(c_t) + \sum_t \lambda_t(k_t - c_t - k_{t+1}) + wk_{T+1}$$

在原问题的基础上增加互补松弛条件：

$$w \geq 0, k_{t+1} \geq 0, wk_{T+1} = 0$$

根据一阶条件可得

$$\frac{\partial L}{\partial k_{T+1}} = -\lambda_T + w = 0 \to \lambda_T k_{T+1} = \beta^T u'(c_T) k_{T+1} = 0$$

该式表示了非 *Poniz(NPZ)* 条件，可以从两个角度来理解其经济含义。首先，如果 $u'(c) > 0$，则 $k_t = 0$，这表示如果末期消费的边际效用为正，个体还想要进行消费，那么此时经济中不存在蛋糕 k 继续用于消费；如果 $k_t > 0$，则 $u'(c_t) = 0$，这表示如果经济中还有剩余的蛋糕，那么此时个体消费的边际效用一定为 0，消费蛋糕不会增加个体的效用。其次，$\lambda_T k_{T+1} = 0$ 中，λ_t 表示 k_{t+1} 的影子价格，该式表明剩余蛋糕的总价值（影子价格与剩余蛋糕存量）等于 0，即剩下的蛋糕不存在社会价值，跨期消费问题均达到均衡。简而言之，最终时刻必然满足：如果想要消费，则经济中不存在剩余蛋糕；如果经济中存在剩余蛋糕，则个体不存在消费倾向。

3.3.2 Case：有限期的 Cake Eating Model

给定 $u(c_t) = \frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}$，求解如下离散动态模型吗，得到消费与资本的动态路径：$\{c_t\}_0^T$ 和 $\{k_t\}_1^{T+1}$

$$\begin{aligned} max\ &\sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c_t) \\ s.t.\ &k_{t+1} \leq k_t - c_t \\ &k_{T+1} \geq 0 \end{aligned}$$

其中 $\beta = \frac{1}{1+\rho}$。构造 *Lagrange* 函数

$$\mathcal{L}(c_t, k_t, \lambda_t, w) = \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c_t) + \sum_{t=0}^{T} \lambda_t(k_t - c_t - k_{t+1}) + wk_{T+1}$$

其中，$\lambda_0, \ldots, \lambda_T, w$ 为 *Lagrange* 乘子。最优性条件表示为：

- c_t：$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = \beta^t u'(c_t) - \lambda_t = 0 \rightarrow \beta^t c_t^{-\sigma} = \lambda_t, t = 0, \ldots, T;$
- k_t：$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_t} = \lambda_t - \lambda_{t-1} = 0, t = 0, \ldots, T;$
- k_{T+1}：$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{T+1}} = -\lambda_T + w = 0, t = T+1;$
- 松弛条件：$\lambda_t \geq 0, k_t - c_t - k_{t+1} \geq 0, \lambda_t(k_t - c_t - k_{t+1}) = 0$，$t = 0, \ldots, T;$
- 松弛条件：$w \geq 0, k_{T+1} \geq 0, wk_{T+1} = 0$，$t = T+1;$

根据一阶条件可知，$\lambda_t = \beta^t u'(c_t) > 0$，由松弛条件有 $k_t - c_t = k_{t+1}$；同时根据 $w = k_T > 0$ 可知，$k_{T+1} = 0$。简化一阶条件可以得到：

$$\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} = 1 \rightarrow c_t = \beta^{\frac{t}{\sigma}} c_0$$

进一步的，可以求解序列 $\{c_t\}_0^T, \{k_t\}_1^{T+1}$：加总约束条件可以得到

$$\sum^T c_t = \sum^T \beta^{\frac{t}{\sigma}} c_0 = k_0 - k_{T+1} = k_0 \rightarrow c_0 = \frac{1-\beta^{\frac{1}{\sigma}}}{1-\beta^{\frac{T+1}{\sigma}}} k_0$$

$$c_t = \beta^{\frac{t}{\sigma}} c_0 = \beta^{\frac{t}{\sigma}} \frac{1-\beta^{\frac{1}{\sigma}}}{1-\beta^{\frac{T+1}{\sigma}}} k_0$$

上述方程可以确定消费序列 $\{c_t\}_0^T$。给定 k_0，根据 $k_{t+1} = k_t - c_t$ 可以确定资本序列 $\{k_t\}_1^{T+1}$。

$$k_t = k_0 - \sum_{i=0}^{t-1} c_i = k_0 - \frac{1-\beta^{\frac{t}{\sigma}}}{1-\beta^{\frac{1}{\sigma}}} c_0 = (1 - \frac{1-\beta^{\frac{t}{\sigma}}}{1-\beta^{\frac{T+1}{\sigma}}}) k_0$$

综上，给出该离散动态模型的消费序列与资本序列：

$$c_t = \beta^{\frac{t}{\sigma}} \frac{1-\beta^{\frac{1}{\sigma}}}{1-\beta^{\frac{T+1}{\sigma}}} k_0$$

$$k_t = (1 - \frac{1-\beta^{\frac{t}{\sigma}}}{1-\beta^{\frac{T+1}{\sigma}}}) k_0,\ t = 1, \ldots, T;\ k_{T+1} = 0$$

3.3.3 无限期的离散时间动态优化问题

将有限期的离散时间动态优化问题推广到无限期：要求终点时刻的资本存量非负

$$max \sum^{\infty} u(c_t),\ s.t.\ k_{t+1} \leq k_t - c_t, t = 0, \ldots, \infty; \lim_{t \to \infty} k(t) \geq 0; k_0$$

根据一阶条件可以得到

$$\beta u'(c_{t+1})/u'(c_t) = 1$$

横截性条件表示为

$$\lim \lambda_t k_t = \lim \beta^t u'(c_t) k_t = 0$$

这意味着无穷远处资源的总价值为 0，或者从资源于消费的角度看存在资源与消费的权衡取舍：存在资源的时候则边际消费为 0，存在边际消费的时候资源为 0。根据上述标准问题，可以得到消费与资本的动态路径：$\{c_t\}_0^{\infty}$ 和 $\{k_t\}_1^{\infty}$。

$$c_t = \lim_{t \to \infty} \beta^{\frac{t}{\sigma}} \frac{1-\beta^{\frac{1}{\sigma}}}{1-\beta^{\frac{T+1}{\sigma}}} k_0 = \beta^{\frac{t}{\sigma}} (1 - \beta^{\frac{1}{\sigma}}) k_0$$

$$k_t = \lim_{t \to \infty} (1 - \frac{1-\beta^{\frac{t}{\sigma}}}{1-\beta^{\frac{T+1}{\sigma}}}) k_0 = \beta^{\frac{t}{\sigma}} k_0$$

3.4 离散时间 *Ramsey Model*

离散时间中央计划者的 *Ramsey Model* 表示为

$$max \sum^{T} \beta^t u(c_t) \ s.t. \ k_{t+1} \leq k_t + f(k_t) - c_t, k_0$$

此外满足终点条件 $k_{T+1} \geq 0$ 或者无限期对应于 $\lim k(t) \geq 0$。其中资本积累（储蓄）来自于总收入 $k_t + f(k_t)$ 与总支出 c_t 的差值。定义 *Lagrange* 函数：

$$L = \sum^{T} \beta^t u(c_t) + \sum^{T} \lambda_t [k_t + f(k_t) - c_t - k_{t+1}] + w k_{T+1}$$

其中 $\lambda_0, \ldots, \lambda_T, w$ 是 *Lagrange* 乘子，分别表示 $k_1, \ldots, k_T, k_{T+1}$ 对应的边际值。最优化条件给定为

$$\begin{aligned}
&\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}(1 + f'(k_{t+1})) = 1 \\
&k_{t+1} = f(k_t) + k_t - c_t \\
&\lim \lambda_t k_t = \lim \beta^t u'(c_t) k_t = 0
\end{aligned}$$

其中 $\lim \beta^t u'(c_t) k_t = 0$ 是标准 *Ramsey Model* 对应的横截性条件。上述方程给定了关于 (k_t, c_t) 的二维差分动力系统，从而可以确定消费和资本积累的动态路径 $\{c_t\}_0^\infty$ 和 $\{k_t\}_1^\infty$。可以证明：上述二维差分动力系统存在唯一、稳定的鞍点稳定均衡点。

***proof*:** 给定该动力系统的均衡点为 $(\bar{c}, \bar{k})$，均衡情况下该动力系统转化为：

$$\begin{aligned}
\beta(1 + f'(\bar{k})) = 1 \\
f(\bar{k}) = \bar{c}
\end{aligned}$$

考虑到 $f(k)$ 为新古典生产函数，$f(k), f'(k)$ 均为单调函数，因此必然可以唯一确定均衡解 $(\bar{c}, \bar{k})$。接下来讨论该均衡点的稳定性：首先将 *Euler* 方程在均衡点 $(\bar{c}, \bar{k})$ 处线性展开，考虑到 $c_t = k_t + f(k_t) - k_{t+1}$，将其转换为关于 k_t 的一维动力系统，可以得到

$$\begin{aligned}
-u''(\bar{c})((1 + f'(\bar{k}))(k_t - \bar{k}) - (k_{t+1} - \bar{k})) + \beta f''(\bar{k}) u'(\bar{c})(k_{t+1} - \bar{k}) + \\
\beta(1 + f'(\bar{k}) u''(\bar{c})((1 + f'(\bar{k}))(k_{t+1} - \bar{k})) - (k_{t+2-\bar{k}})) = 0
\end{aligned}$$

化简得到

$$-\beta^{-1} u''(\bar{c})(k_t - \bar{k}) + [(1 + \beta^{-1}) u''(\bar{c}) + \beta f''(\bar{k}) u'(\bar{c})](k_{t+1} - \bar{k}) - u''(\bar{c})(k_{t+2} - \bar{k}) = 0$$

转换为矩阵形式得到：

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} k_{t+2} - \bar{k} \\ k_{t+1} - \bar{k} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 + \beta^{-1} + \frac{f''(\bar{k})/(1+f'(\bar{k}))}{u''(\bar{c})/u'(\bar{c})} & -\beta^{-1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{t+1} - \bar{k} \\ k_t - \bar{k} \end{bmatrix} \\
&= A \begin{bmatrix} k_{t+1} - \bar{k} \\ k_t - \bar{k} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

该一维动力系统的稳定性取决于矩阵 A 的特征根情况。线性方程组对应的特征方程表示为：

$$h(\lambda) = \lambda^2 - (1 + \beta^{-1} + \frac{f''(\bar{k})/(1 + f'(\bar{k}))}{u''(\bar{c})/u'(\bar{c})})\lambda + \beta^{-1}$$

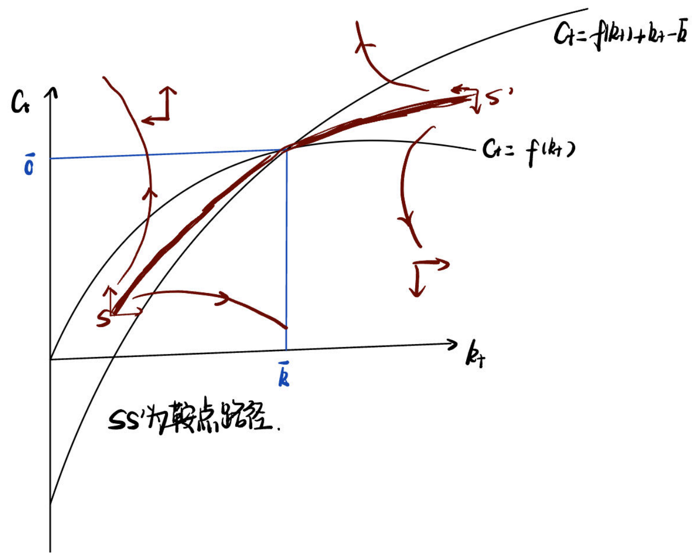
现在需要判定特征方程根的情况。$h(0) = \beta^{-1} > 0$, $h(1) = -\frac{f''(\bar{k})/(1+f'(\bar{k}))}{u''(\bar{c})/u'(\bar{c})} < 0$, $\lim_{\lambda \to \infty} h(\lambda) = +\infty$，根据介值定理可以确定该特征方程存在两根 $\lambda_1 \in (0, 1), \lambda_2 \in (1, +\infty)$，因此，该均衡点是鞍点稳定的。下面给出该二维动力系统的相位图。下面需要确定鞍点路径，首先讨论 k_t 的分界线

$$k_{t+1} - k_t \geq 0 \Rightarrow f(k_t) - c_t \geq 0 \Rightarrow c_t \leq f(k_t)$$

因此在 (c_t, k_t) 平面内，$c_t = f(k_t)$ 将 k_t 的变化分为两部分，当 $c_t \le f(k_t)$ 时，$k_{t+1} - k_t \ge 0$；当 $c_t \ge f(k_t)$ 时，$k_{t+1} - k_t \le 0$。其次讨论 c_t 的分界线

$$
\begin{aligned}
c_{t+1} - c_t \ge 0 &\Rightarrow \beta u'(c_{t+1}) \le \beta u'(c_t) \\
&\Rightarrow \frac{u'(c_t)}{1 + f'(k_{t+1})} \le \beta u'(c_t) \\
&\Rightarrow 1 \le \beta(1 + f'(k_{t+1})) \\
&\Rightarrow \beta(1 + f'(\bar{k})) \le \beta(1 + f'(k_{t+1})), f''(k_t) \le 0 \\
&\Rightarrow k_{t+1} \le \bar{k} \\
&\Rightarrow f(k_t) + k_t - c_t \le \bar{k} \\
&\Rightarrow c_t \ge f(k_t) + k_t - \bar{k}
\end{aligned}
$$

因此在 (c_t, k_t) 平面内，$c_t = f(k_t) + k_t - \bar{k}$ 将 c_t 的变化分为两部分，当 $c_t \ge f(k_t) + k_t - \bar{k}$ 时，$c_{t+1} \ge c_t$；当 $c_t \le f(k_t) + k_t - \bar{k}$ 时，$c_{t+1} \le c_t$。据此可以画出该二维动力系统的相位图：



4 连续动态优化：*Pontryagin* 极大值原理

对于离散时间的动态优化问题，可以利用 Lagrange 方法进行求解，但是对于连续时间的动态优化问题 Lagrange 方法不再有效，而是转而采用最优控制方法和动态规划方法，本节主要讨论最优控制方法。

4.1 *Pontryagin* 极大值原理

连续时间动态优化的一般形式表示为：

$$\begin{aligned} max(min) \quad & \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt \\ s.t.\ & \dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t)) \\ & x(t_0) = x_0 \ or \ x(t_1) = x_1 \end{aligned}$$

其中 $x(t), u(t)$ 均为 $(t_0, t_1) \to \mathcal{R}$ 的映射；$u(t)$ 表示控制变量（*control variable*），即可以随意改变取值因而是可选择的变量；$x(t)$ 表示状态变量（*state variable*），即表示不可以随意改变取值，只能通过改变控制变量的取值来实现。例如在 *Cake-Eating* 模型中，c_t 是控制变量，k_t 是状态变量，能够选择的是每一期消费多少蛋糕，而不能选择每一期剩下多少蛋糕，剩下多少蛋糕是根据的消费来决定的。一个简单的判定方法就是：谁具有时间导数谁就是状态变量。给一个简单的例子：

$$max \ \int_0^1 (1 + \dot{x}^2)^{1/2} dt$$

转化为一般形式的连续优化问题等价于：

$$\begin{aligned} max \ & \int_0^1 (1 + u^2)^{1/2} dt \\ s.t. & \dot{x} = u, \ x(t_0) = x_0 \end{aligned}$$

对于初始条件，只需要给出一个初值条件 $x(t_0) = x_0$ 或者 $x(t_1) = x_1$ 即可，不需要两个条件都给出；这主要是因为在经济中面临的都是不确定终点的情形，因而一般采用 TVC 加以限定。

接下来定义*Hamilton* 函数：

$$H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = f(t, x(t), u(t)) + \lambda(t) g(t, x(t), u(t))$$

其中 $\lambda(t)$ 为 $(t_0, t_1) \to \mathcal{R}$ 的映射，定义为 *Hamilton* 乘子，表示状态变量 x_t 的边际量或影子价格，即 t 时刻状态变量 x_t 改变一单位将会导致最优值变化多少单位。

给出*Pontryagin* 极大值原理: 如果 (x^*, u^*) 是上述动态优化问题的解，则存在 λ^* 满足如下条件：

1. 最优性条件：对于控制变量 $u(t)$ 有 $\frac{\partial H}{\partial u} = f_u + \lambda(t) g_u = 0$；
2. *Euler* 方程：对于状态变量 $x(t)$ 有 $\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -[f_x + \lambda(t) g_x]$；
3. 可行性条件（约束）：$\dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t))$ 以及初始条件 $x(t_0) = x_0$；
4. *TVC*：$\lambda(t_1) = 0$；
5. 二阶条件（SOC）：对于最大值问题有 $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \leq 0$；对于最小值问题有 $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \geq 0$；

其中，最值得注意的是 TVC（*transversal condition*）。首先，为什么需要 TVC，这是因为可以看出存在最优性条件和欧拉方程两个微分方程，但是只有一个初始条件，因此还需要增加一个初始条件以保证均衡解的存在性；例如，给定初始值 $x(t_1) = x_1$，相应的 $\lambda(t_0) = 0$[16]；其次，TVC 是什么；在后续关于 *Pontryagin* 极大值原理的导出中可以更清晰的看到这一点，实际上就是给定了初始值之后需要对应于初始值确定一个乘子的初始条件，仅仅给定其余条件是必要条件，TVC 的存在保证了解的充要性。

[16]这一点可以从证明过程中清楚的看到 TVC 是如何确定出来的。

4.2 *Pontryagin* 极大值原理的证明

假定最优解为 (x^*, u^*)，同时假定对于任意的随机扰动 a 和随机扰动 $h(t)$，其中 $a \in \mathcal{R}, h(t_0) = h(t_1) = 0$。现在对最优解进行扰动，考虑到状态变量 x 不可以任意改变，可以得到对于控制变量 u 的扰动结果，得到 $u^* + ah(t)$。相应的有：

$$\dot{x}(t) = g(t, x, u^* + ah(t)),\ x(t_0) = x_0$$

可以得到相应的状态变量为 $y(t, a)$，此时得到的解 $(u^* + ah(t), y(t, a))$ 依旧是可行解，从而最优化目标函数可以转换为针对参数 a 的静态优化问题：定义最优化函数

$$J(a) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t, a), u^* + ah(t))dt$$

构造 *Lagrange* 函数：

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t, a), u^* + ah(t))dt + \int_{t_0}^{t_1} \lambda[g(t, y(t, a), u^* + ah(t)) - \dot{x}(t)]dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} [f(t, y(t, a), u^* + ah(t)) + \lambda g(t, y(t, a), u^* + ah(t)) + \dot{\lambda} y(t, a)]dt \\
&- \lambda(t_1)y(t_1, a) + \lambda(t_0)y(t_0, a)
\end{aligned}$$

其中 $\int \lambda \dot{x}(t)dt$ 采用分步积分，$y(t_0, a) = x(t_0) = x_0$；[17]将其代入 $J(a)$ 中得到：

$$\begin{aligned}
J(a) &= \int_{t_0}^{t_1} [f(t, y(t, a), u^* + ah(t)) + \lambda g(t, y(t, a), u^* + ah(t)) + \dot{\lambda} y(t, a)]dt \\
&- \lambda(t_1)y(t_1, a) + \lambda(t_0)y(t_0, a) \\
J'(a) &= \int_{t_0}^{t_1} [f_x + \lambda g_x + \dot{\lambda}]y_a(t, a)dt - \lambda(t_1)y_a(t, a) + \int_{t_0}^{t_1} [f_u + \lambda g_u]h(t)dt \\
J'(a)|_{a=0} &= \int_{t_0}^{t_1} [f_x(t, x^*, u^*) + \lambda g_x(t, x^*, u^*) + \dot{\lambda}]y_a(t, 0)dt - (\lambda(t_1) - \phi_x)y_a(t, 0) \\
&+ \int_{t_0}^{t_1} [f_u(t, x^*, u^*) + \lambda g_u(t, x^*, u^*)]h(t)dt
\end{aligned}$$

其中 $\lambda(t_0)y(t_0, a) = x_0$。一阶条件需要满足 $J'(a)|_{a=0} = 0$。为了导出 *Pontryagin* 最大值原理，任取 x^* 满足：

$$\begin{aligned}
f_x(t, x^*, u^*) + \lambda(t)g_x(t, x^*, u^*) + \dot{\lambda}(t) = 0 \\
\lambda(t_1) = 0
\end{aligned}$$

其中对应得到 λ^*。(1) 式表示 Euler 方程，(2) 式表示 TVC[18]。进一步的，对于任取的随机扰动 $h(t)$，为了保证 $\int_{t_0}^{t_1}[f_u(t, x^*, u^*) + \lambda g_u(t, x^*, u^*)]h(t)dt = 0$，必然满足

$$f_u(t, x^*, u^*) + \lambda^* g_u(t, x^*, u^*) = 0$$

(3) 式表示最优性条件。最后，求解需要满足的二阶条件：

$$J''(a)|_{a=0} = \int_{t_0}^{t_1} [f_{uu}(t, x^*, u^*) + \lambda^* g_{uu}(t, x^*, u^*)]h^2(t)dt$$

[17]这里可以利用初值条件确定，如果给定了 x_0，那么对应的 $y(t_0, a) = x(t_0) = x_0$；如果给定了 x_1，那么对应的 $y(t_1, a) = x(t_1) = x_1$。

[18]在这里可以看到，如果给定了初始值 $x(t_0) = x_0$，那么在方程中只剩下终止时间 $\lambda(t_1)$ 需要确定；相应的如果给定了 $x(t_1) = x_1$，那么需要确定初始 $\lambda(t_0) = 0$

相应的，对于最大化问题需要满足 $J''(a)|_{a=0} \leq 0$，对于任取的随机扰动 $h(t)$ 需要保证

$$f_{uu}(t, x^*, u^*) + \lambda^* g_{uu}(t, x^*, u^*) \leq 0$$

对于最小化问题需要满足 $J''(a)|_{a=0} \geq 0$，对于任取的随机扰动 $h(t)$ 需要保证

$$f_{uu}(t, x^*, u^*) + \lambda^* g_{uu}(t, x^*, u^*) \geq 0$$

上述 (4) 或 (5) 式构成了最大化或最小化问题的二阶条件。

上述证明过程清楚的给出了每个条件的决定过程，当模型中加入其他调整时也可以据此给出相应的最优条件调整。例如，给定长辈对晚辈的遗赠 $k(T)$（终止状态存量）[19]，此时一般形式转化为：

$$\begin{aligned} max(min) \quad & \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt + \phi(x_{t_1}) \\ s.t. \ & \dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t)) \\ & x(t_0) = x_0 \ or \ x(t_1) = x_1 \end{aligned}$$

对应的最优条件转化为：注意到此时只有 TVC 发生了改变

1. 最优性条件：对于控制变量 $u(t)$ 有 $\frac{\partial H}{\partial u} = f_u + \lambda(t) g_u = 0$；
2. *Euler* 方程：对于状态变量 $x(t)$ 有 $\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -[f_x + \lambda(t) g_x]$；
3. 可行性条件（约束）：$\dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t))$ 以及初始条件 $x(t_0) = x_0$；
4. *TVC*：$\lambda^*(t_1) - \phi_x(x^*_{t_1}) = 0$；
5. 二阶条件（SOC）：对于最大值问题有 $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \leq 0$；对于最小值问题有 $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \geq 0$；

4.3 *Hamilton* 乘子与 *Envelop Theorem*

4.3.1 *Hamilton* 乘子

进一步的考察 *Hamilton* 乘子，最优化问题的值函数表示为：从 t_0 开始的值函数定义如下

$$\begin{aligned} V(t_0, t_1, x_0) = max & \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, u)dt \ s.t. \ \dot{x} = g(t, x, u), x_0 \\ =_{\forall \lambda} & \int_{t_0}^{t^1} [f(t, x^*, u^*) + \lambda^* g(t, x^*, u^*) + \dot{\lambda}(t)^* x^*]dt \\ & - \lambda^*(t_1) x^*(t_1) + \lambda^*(t_0) x^*(t_0) \end{aligned}$$

值函数并不是一成不变的，而是跟随初始时间和结束时间而动态变化。更广义的从任意时刻 $t^* \in (t_0, t_1)$，值函数表示为

$$V(t^*, t_1, x^*) = max \int_{t^*}^{t_1} f(t, x, u)dt \ s.t. \ \dot{x} = g(t, x, u), x^*$$

可以证明

$$\lambda(t^*) = \frac{\partial V(t^*, t_1, x^*)}{\partial x^*}$$

相应的 *Hamilton* 乘子 $\lambda(t^*)$ 就是对应时刻状态变量 x^* 的边际值。

[19]这种形式可以有效避免消费趋于无穷大的庞氏骗局，是除 TVC 以外的控制消费和资本存量收敛的其他处理方法。

Proof:

$$\frac{\partial V(t_0,t_1,x_0)}{\partial x_0}=\lim_{\Delta x_0\to 0}\frac{V(t_0,t_1,x_0+\Delta x_0)-V(t_0,t_1,x_0)}{\Delta x_0}$$

$$\begin{aligned}V(t_0,t_1,x_0)&=\int_{t_0}^{t^1}f(t,x^*,u^*)dt=_{\forall\lambda}\int_{t_0}^{t^1}[f(t,x^*,u^*)+\lambda^*g(t,x^*,u^*)+\dot{\lambda}(t)^*x^*]dt\\&-\lambda^*(t_1)x^*(t_1)+\lambda^*(t_0)x^*(t_0)\\V(t_0,t_1,x_0+\Delta x_0)&=\int_{t_0}^{t^1}f(t,\bar{x},\bar{u})dt=_{\forall\lambda}\int_{t_0}^{t^1}[f(t,\bar{x},\bar{u})+\lambda g(t,\bar{x},\bar{u})+\dot{\lambda}(t)\bar{x}]dt\\&-\lambda(t_1)\bar{x}(t_1)+\lambda(t_0)\bar{x}(t_0)\end{aligned}$$

下式对于任意 λ 均成立，取 $\lambda=\lambda^*$，根据横截性条件可知 $\lambda(t_1)=0$，下式在 (t,x^*,u^*) 处一阶泰勒展开得到

$$\begin{aligned}f(t,\bar{x},\bar{u})&=f(t,x^*,u^*)+f_x(t,x^*,u^*)(\bar{x}-x^*)+f_u(t,x^*,u^*)(\bar{u}-u^*)\\g(t,\bar{x},\bar{u})&=g(t,x^*,u^*)+g_x(t,x^*,u^*)(\bar{x}-x^*)+g_u(t,x^*,u^*)(\bar{u}-u^*)\\V(t_0,t_1,x_0+\Delta x_0)-V(t_0,t_1,x_0+x_0)&=\int_{t_0}^{t^1}([f_x+\lambda^*g_x+\dot{\lambda}^*](\bar{x}-x^*)+[f_u+\lambda^*g_u])dt+\lambda^*(t_0)\Delta x_0\\&=\lambda^*(t_0)\Delta x_0\\\frac{\partial V(t_0,t_1,x_0)}{\partial x_0}&=\lambda(t_0)\end{aligned}$$

其中 $f_x+\lambda^*g_x+\dot{\lambda}^*=0$ 为欧拉方程，$f_u+\lambda^*g_u=0$ 最优性条件；可证 Hamilton 乘子是任意时刻状态变量的边际值，与状态变量一一对应。

Case: 给定中央计划者的 *Ramsey* 模型：

$$\begin{aligned}max\ &\int_0^T u(c(t))e^{-\rho t}dt\\s.t.\ &\dot{k}(t)=f(k(t))-c(t),k_0\\&\mathcal{H}=u(c(t))e^{-\rho t}+\lambda(t)[f(k(t))-c(t)]\end{aligned}$$

其中 $\lambda(t)$ 是 *Hamilton* 乘子，是状态变量 $k(t)$ 的边际值，即状态变量变化 *1* 单位对最优值的影响，也是 $k(t)$ 对应的影子价格（用来增加资本存量或积累所带来的效用的改变）。最优条件得到

$$u'(c(t))e^{-\rho t}=\lambda(t)$$

最优时刻需要满足消费的边际效用等于财富积累的边际值，即 *1* 单位资本用来积累带来的边际效用等价于 *1* 单位用来消费带来的边际效用等价。

4.3.2 *Envelop Theorem*

给定一般的连续优化问题：值函数给定为

$$\begin{aligned}V(r)=max(min)\ &\int_{t_0}^{t_1}f(t,x(t),u(t),r)dt\\s.t.\ &\dot{x}(t)=g(t,x(t),u(t),r),x(t_0)=x_0\end{aligned}$$

其中参数 r 可以表示经济政策或系统中本身的参数（替代弹性等）等变量，表征经济优化中的一系列参数，包络引理讨论了参数 r 的变化如何影响系统最优值 $V(r)$。

包络引理给定为：定义 *Hamilton* 函数 $H = f(t, x(t), u(t), r) + \lambda g(t, x(t), u(t), r)$

$$\frac{\partial V(r)}{\partial r} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H}{\partial r}_{(x(t,r),u(t,r),\lambda(t,r))} dt$$

在最优值 $(x(t,r), u(t,r), \lambda(t,r))$ 处对应的取值。

Proof: 给定最大值条件

$$\frac{\partial H}{\partial u} = f_u + \lambda(t) g_u = 0$$
$$\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial x} = -f_x - \lambda g_x$$
$$\dot{x}(t) = g(t, x, u, r)$$
$$TVC.\ \lambda(t_1) = 0$$

该系统可以确定最优解 $(x^*(t,r), u^*(t,r), \lambda^*(t,r))$，对应值函数得到

$$\begin{aligned} V(r) &= \int_{t_0}^{t_1} f(t, x^*(t,r), u^*(t,r), r) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [f^* + \lambda^* g^* + \dot{\lambda}^* x^*] dt - \lambda^*(t_1, r) x^*(t_1, r) + \lambda^*(t_0, r) x^*(t_0, r) \end{aligned}$$

上式对于参数 r 求导得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial r} = &\int_{t_0}^{t_1} [f_x^* + \lambda^* g_x^* + \dot{\lambda}^*] \frac{\partial x^*(t,r)}{\partial r} dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} [f_u^* + \lambda^* g_u^*] \frac{\partial u^*(t,r)}{\partial r} dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} [f_r^* + \lambda^* g_r^*] dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} [\frac{\partial \lambda^*}{\partial r} g^* + x^* \frac{\partial \dot{\lambda}^*}{\partial r}] dt - \lambda_r^*(t_1, r) x^*(t_1, r) \\ &- \lambda^*(t_1, r) x_r^*(t_1, r) + \lambda_r^*(t_0, r) x^*(t_0, r) + \lambda^*(t_0, r) x_r^*(t_0, r) \end{aligned}$$

其中 $x(t_0, r) = x_0, x_r^*(t_0, r) = 0$；将最优值条件代入得到等式 1 和等式 2 均为 0，给定 $\dot{x} = g$，则有

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} [\frac{\partial \lambda^*}{\partial r} g^*] dt &= \int_{t_0}^{t_1} [\frac{\partial \lambda^*}{\partial r} \dot{x}^*] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [\frac{\partial \lambda^*}{\partial r}] dx^* \\ &= x^* \frac{\partial \lambda^*}{\partial r} |_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} x^* \frac{\partial \dot{\lambda}^*}{\partial r} dt \\ &= x^*(t_1, r) \lambda_r^*(t_1, r) - x^*(t_0, r) \lambda_r^*(t_0, r) - \int_{t_0}^{t_1} x^* \frac{\partial \dot{\lambda}^*}{\partial r} dt \end{aligned}$$

与上式合并得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial r} &= \int_{t_0}^{t_1} [f_r^* + \lambda^* g_r^*] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H}{\partial r}_{(x^*(t,r),u^*(t,r),\lambda^*(t,r))} dt \end{aligned}$$

QED.

Case：给定中央计划者的 *Ramsey* 模型：

$$W(g) = max \int_0^T u(c(t))e^{-\rho t}dt$$
$$s.t.\ \dot{k}(t) = f(k(t)) - nk(t) - c(t) - g, k_0$$
$$\mathcal{H} = u(c(t))e^{-\rho t} + \lambda(t)[f(k(t)) - nk(t) - c(t) - g]$$

上述问题的值函数可以表示为社会福利函数 W，讨论政府支出对于社会福利的影响：

$$\frac{\partial W(g)}{\partial g} = \int_0^T \frac{\partial H}{\partial g} = \int_0^T -\lambda^* dt$$
$$= -\int_0^T u'(c(t))e^{-\rho t}dt < 0$$

等式 *3* 利用最优性条件得到，该式的经济含义是政府支出增加会导致私人消费带来的边际效用降低（挤出）从而降低社会总福利。这是因为模型中公共支出将一部分资源拿出来“浪费”而不具有生产性，因而公共支出必然会降低资本积累同时降低居民效用，因而模型本身无法真实刻画公共支出的作用。例如可以**将公共支出纳入效用函数** $u(c,g)$，包络引理得到

$$\frac{\partial W(g)}{\partial g} = \int_0^T (u_g(c,g) - u_c(c,g))e^{-\rho t}dt$$

模型中表示为公共支出对居民效用的影响和消费边际效用的差值，如果政府公共支出比私人消费的边际效用更高那就应该来让政府做，例如建公园等。此时最优政府规模界定为 $u_g = u_c$，即政府边际和私人边际应该一致。

4.3.3 解的充分性条件

如果连续动态优化问题存在最优解，必然满足 *Pontryagin* 极大值原理（必要性条件）；如果给定 *Pontryagin* 极大值原理的五个条件，得到的是不是最优解（充分性条件）?

充分性条件

如果 $f(t,x,u), g(t,x,u)$ 对于 (x,u) 是凹的，存在 $(x^*,u^*,\lambda^*), \lambda \geq 0$ 满足 *Pontryagin* 极大值原理，则 (x^*,u^*,λ^*) 是原问题的极大值点；如果函数为凸函数，则对应于原问题的极小值点。充分性条件表明函数的凹凸性质影响了极大值或极小值的取值；其次 *Hamilton* 乘子需满足 $\lambda \geq 0$ 条件。

Proof: 假定 (x^*,u^*) 对应 $\lambda^* \geq 0$，$f(t,x,u), g(t,x,u)$ 对于 (x,u) 是凹的，证明对于任意的 (x,u) 有

$$\mathcal{D} = \int_{t_0}^{t_1} [f(t,x,u) - f(t,x^*,u^*)]dt \leq 0$$

凹函数的一阶性质（泰勒展开）得到

$$f(t,x,u) - f^*(t,x^*,u^*) \leq f_x^*(x-x^*) + f_u^*(u-u^*)$$
$$g(t,x,u) - g^*(t,x^*,u^*) \leq g_x^*(x-x^*) + g_u^*(u-u^*)$$

相应的转化为

$$\mathcal{D} \leq \int_{t_0}^{t_1} [f_x^*(x-x^*) + f_u^*(u-u^*)]dt$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} ([-\dot{\lambda}^* - \lambda^* g_x](x-x^*) + (-\lambda^* g_u)(u-u^*)dt$$

其中上式利用最大值原理的欧拉方程以及函数的凹性，进一步的得到

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1}\dot{\lambda}^*(x-x^*)dt &= (x-x^*)\lambda|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\lambda^*(\dot{x}-\dot{x}^*)dt\\ &= \int_{t_0}^{t_1}\lambda^*(g-g^*)dt\\ \mathcal{D} &\leq \int_{t_0}^{t_1}\lambda^*[-g_x(x-x^*)-g_u(u-u^*)+(g-g^*)]dt \leq 0\end{aligned}$$

其中 $\lambda(t_1)=0, x(t_0)=x^*(t_0)=0$，分步积分仅包含第二项，利用最优性条件代换得到等式 2。等式 3 利用函数 $g(t,x,u)$ 的凹性。

给定充分性条件，经济学中效用函数和生产函数一般假定具有凹性从而保证了充分性条件成立，根据最大值原理可以确定最优值。此外，效用函数是增函数也保证了充分性条件 $\lambda \geq 0$ 成立。

Case：给定中央计划者的 *Ramsey* 模型：

$$\begin{aligned}W(g) = max \int_0^T u(c(t))e^{-\rho t}dt\\ s.t.\ \dot{k}(t) = f(k(t))-nk(t)-c(t), k_0\\ \mathcal{H} = u(c(t))e^{-\rho t}+\lambda(t)[f(k(t))-nk(t)-c(t)]\end{aligned}$$

给定效用函数和生产函数的凹性，现在验证满足充分性条件：

- 给定最优性条件 $\lambda = u'(c)e^{-\rho t} \geq 0$，效用函数是增函数；
- 目标函数为 $f(t,x,u)=u(c)e^{-\rho t}$，二阶导数 $u''(c) \leq 0$，目标函数具有凹性；
- 约束函数为 $g(t,x,u)=f(k)-nk-c$，二阶海塞矩阵依赖于 $f''(k)$，如果生产函数是凹性则二阶海塞矩阵负定，约束函数具有凹性；

因而给定效用函数和生产函数的凹性，该模型自发满足充分性条件，无需证明可直接应用。

4.4 变分法

连续动态优化中存在四个基本变量：初始时间 t_0、初始值 $x(t_0)$、终止时间 t_1、终止值 $x(t_1)$，四种状态可以组合出不同的起点和终端问题，从而框定了可行解范围。任意变量存在三种情况：给定、不给定以及不等式约束，例如 $t_1 \leq T$ 等。

给定如下连续优化问题（最大化）：

$$\begin{aligned}max \int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),u(t))dt\\ s.t.\ \dot{x}(t) = g(t,x(t),u(t))\\ x(t_0) = x_0\end{aligned}$$

给定初始时间和初始值，但是终止时间和终止值并不确定。使用 4.2 中的极大值原理无法处理，这是因为扰动函数的定义域和 $u(t)$ 的定义域可能存在差异，因此随意扰动与函数的可加性并不明确，可以在函数 $u(t)$ 的基础上进行延拓以满足定义域相同时的可加性。为了更方便的处理各种情境下的初始和终端问题，引入变分法工具。

引入**变分法**重新考察上述终端问题；首先考察微分和差分的关系

- 微分无穷小可以扔掉而差分无穷小不能扔掉，即 $f'(x)\Delta x + 0(\Delta x) \geq 0$ 不能确定 $f'(x)\Delta x \geq 0$
- 微分没有方向但是差分有方向，即 $f'(x)\Delta x \geq 0$, 给定 $f'(x) \geq 0$ 可以确定 $\Delta x \geq 0$;

引入变分处理，可以结合微分和差分的性质：

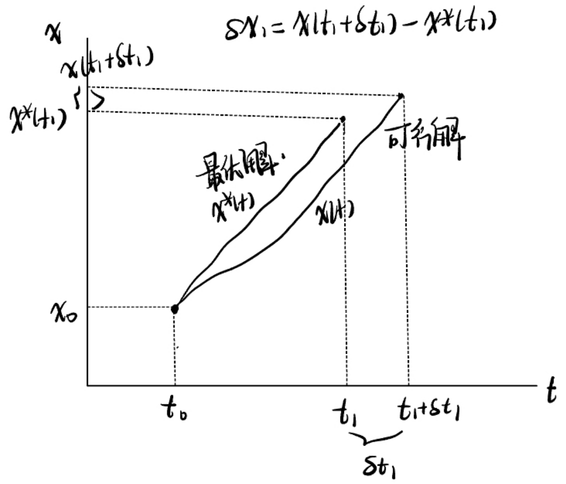
$$f'(x)\delta x + o(\delta x) \geq 0 \rightarrow f'(x)\delta x \geq 0$$
$$f'(x)\delta x \geq 0, f'(x) \geq 0 \rightarrow \delta x \geq 0$$

变分的高阶无穷小不影响正负判断且变分具有方向性。

给定 $u^*(t), x^*(t)$ 是连续优化问题的最优解，其中最优解定义在 $[t_0, t_1] \rightarrow \mathcal{R}$ 的映射。存在 $u(t), x(t)$ 是问题的可行解，是定义在 $[t_0, t_1 + \delta t_1] \rightarrow \mathcal{R}$ 的映射，其中 δt_1 符号可正可负，表示变分扰动。注意，$u(t), x(t)$ 是与 $u^*(t), x^*(t)$ 拓扑距离很近的可行解，可行解与最优解的距离定义表示为

$$\begin{aligned}||(u(t), x(t)) - (u^*(t), x^*(t))|| = max\{&max_{t_0 \leq t \leq t_1}|u(t) - u^*(t)| + |\dot{u}(t) - \dot{u}^*(t)|, \delta t_1, \\ &max_{t_0 \leq t \leq t_1}|x(t) - x^*(t)| + |\dot{x}(t) - \dot{x}^*(t)|, \delta x_1\}\end{aligned}$$

其中 $\delta x_1 = x(t_1 + \delta t_1) - x^*(t_1)$。基本的处理思路是控制相同定义域内的距离以及扰动区域外的距离。注意到，在相同的区域里面 $[t_0, t_1]$ 内控制最优值与可行解的最大距离，在扰动区域 $t_1 + \delta t_1$ 上则需要额外界定尽可能小的扰动从而保证距离足够近。其中时间微分加入是为了保证在定义域内不会出现随机的跳动导致不连续，同时只有在加入时间微分后系统才是完备的。



最优解 $u^*(t), x^*(t)$ 对应的值函数表示为

$$\begin{aligned}J^* &= \int_{t_0}^{t_1} f(t, x^*, u^*)dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [f(t, x^*, u^*) + \lambda^* g(t, x^*, u^*) + \dot{\lambda}^* x^*]dt - \lambda^*(t_1)x^*(t_1) + \lambda^*(t_0)x^*(t_0)\end{aligned}$$

可行解 $u(t), x(t)$ 对应的值函数表示为

$$\begin{aligned}J &= \int_{t_0}^{t_1+\delta t_1} f(t, x, u)dt = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, u)dt + \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} f(t, x, u)dt \\ &=_{\forall\lambda} \int_{t_0}^{t_1} [f(t, x, u) + \lambda g(t, x, u) + \dot{\lambda} x]dt - \lambda(t_1)x(t_1) + \lambda(t_0)x(t_0) + \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} f(t, x, u)dt\end{aligned}$$

给定最大化问题，仅需证明

$$J - J^* \leq 0$$

不妨取 $\lambda = \lambda^*$

$$\begin{aligned} J - J^* = &\int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} f(t,x,u)dt + \int_{t_0}^{t_1}[(f-f^*) + \lambda(g-g^*) + \dot{\lambda}(x-x^*)]dt \\ &- \lambda(t_1)(x(t_1) - x^*(t_1)) + \lambda(t_0)(x(t_0) - x^*(t_0)) \end{aligned}$$

其中 $x(t_0) = x^*(t_0) = x_0$，对于函数 f, g 在最优值处展开得到[20]

$$f - f^* = f_x^*(x-x^*) + f_u^*(u-u^*) + o(x-x^*)$$
$$g - g^* = g_x^*(x-x^*) + g_u^*(u-u^*) + 0(x-x^*)$$
$$\int_{t_0}^{t_1}[(f-f^*) + \lambda(g-g^*) + \dot{\lambda}(x-x^*)]dt = \int_{t_0}^{t_1}[(f_x^* + \lambda g_x^* + \dot{\lambda})(x-x^*) + (f_u^* + \lambda g_u^*)(u-u^*)]dt$$

其中 $o(x-x^*)$ 表示高阶无穷小。进一步考察第一项积分，利用积分中值定理展开得到

$$\int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} f(t,x,u)dt = f(\bar{t}, x(\bar{t}), u(\bar{t}))(\bar{t} - t_1), \bar{t} \in (t_1, t_1 + \delta t_1)$$
$$f(\bar{t}, x(\bar{t}), \lambda(\bar{t})) = f(t_1, x(t_1), u(t_1)) + f_t(\bar{t} - t_1) + f_x x'(t_1)(\bar{t} - t_1) + f_u u'(t_1)(\bar{t} - t_1) + o(\delta t_1)$$

等式 2 是在最优值附近的线性展开。考虑到 $(\bar{t} - t_1)$ 是 δt_1 的同阶无穷小，因而 $(\bar{t} - t_1)\delta t_1$ 表示高阶无穷小可被忽略，因此简化上式得到（注意高阶无穷小项不要随意扔掉。）

$$\int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} f(t,x,u)dt = f(t_1, x^*(t_1), u^*(t_1))\delta t_1 + o(\delta t_1)$$

重新简化上式得到

$$\begin{aligned} J - J^* = &f(t_1, x^*(t_1), u^*(t_1))\delta t_1 + o(\delta t_1) \\ &+ \int_{t_0}^{t_1}[(f_x^* + \lambda g_x^* + \dot{\lambda})(x-x^*) + (f_u^* + \lambda g_u^*)(u-u^*)]dt - \lambda(t_1)(x(t_1) - x^*(t_1)) \end{aligned}$$

该式中依然不知道 $x(t_1)$，现在需要对 $x(t_1)$ 进行处理。

$$\begin{aligned} \delta x_1 &= x(t_1 + \delta t_1) - x^*(t_1) \\ &= x(t_1) + \dot{x}(t_1)\delta t_1 - x^*(t_1) \end{aligned}$$

等式 2 是在 t_1 附近线性展开，得到

$$\begin{aligned} x(t_1) - x^*(t_1) &= \delta x_1 - \dot{x}(t_1)\delta t_1 + o(\delta t_1) \\ &= \delta x_1 - \dot{x}^*(t_1)\delta t_1 + (\dot{x}^*(t_1) - \dot{x}(t_1))\delta t_1 + o(\delta t_1) \\ &= \delta x_1 - \dot{x}^*(t_1)\delta t_1 + o(\delta t_1) \end{aligned}$$

其中 $(\dot{x}^*(t_1) - \dot{x}(t_1))$ 是 δt_1 的同阶无穷小，合并进入高阶无穷小项。重新整理方程得到

$$\begin{aligned} J - J^* = &\int_{t_0}^{t_1}[(f_x^* + \lambda g_x^* + \dot{\lambda})(x-x^*) + (f_u^* + \lambda g_u^*)(u-u^*)]dt \\ &- \lambda(t_1)\delta x_1 + [f(t_1, x^*(t_1), u^*(t_1)) + \lambda(t_1)\dot{x}^*(t_1)]\delta t_1 + o(\delta t_1) \\ = &\int_{t_0}^{t_1}[(f_x^* + \lambda g_x^* + \dot{\lambda})(x-x^*) + (f_u^* + \lambda g_u^*)(u-u^*)]dt \\ &- \lambda(t_1)\delta x_1 + H(t_1)\delta t_1 + o(\delta t_1) \end{aligned}$$

[20]简单起见简写为 $f^* = f(t, x^*, u^*), f_x^* = f_x(t, x^*, u^*)$。

其中 $H(t_1)=f(t_1,x^*(t_1),u^*(t_1))+\lambda(t_1)\dot{x}^*(t_1)$ 表示在 t_1 时刻对应的 *Hamilton* 函数。整理得

$$\begin{aligned}\delta J^*=J-J^*=&\int_{t_0}^{t_1}[(f_x^*+\lambda g_x^*+\dot{\lambda})(x-x^*)+(f_u^*+\lambda g_u^*)(u-u^*)]dt\\&-\lambda(t_1)\delta x_1+H(t_1)\delta t_1\le 0\end{aligned}$$

相应的，如果不给定初始条件，给定终止条件 $x(t_1)=x_1$，则表示为

$$\begin{aligned}\delta J^*=&\int_{t_0}^{t_1}[(f_x^*+\lambda g_x^*+\dot{\lambda})(x-x^*)+(f_u^*+\lambda g_u^*)(u-u^*)]dt\\&+\lambda(t_0)\delta x_0-H(t_0)\delta t_0\end{aligned}$$

可以看出，$(f_x^*+\lambda g_x^*+\dot{\lambda})$ 给定了欧拉方程，$(f_u^*+\lambda g_u^*)$ 给定了最优性条件，后两者则给定了 TVC。

关于 TVC 的判定问题，需要考察简化后的变分 (最大化问题)，给定初始值 $(t_0,x(t_0))$，考察

$$\delta J^*=-\lambda(t_1)\delta x_1+H(t_1)\delta t_1\le 0$$

相应的，给定初始值 $(t_1,x(t_1))$，考察

$$\delta J^*=\lambda(t_0)\delta x_0-H(t_0)\delta t_0\le 0$$

下一节将会根据变分给出各种初始条件约束下的横截性条件判定。

4.5 各种初值条件对应的 TVC 问题

最优化问题的初值条件千差万别，不同的起点和终点条件在最优控制中存在不同的横截性条件。现在，利用变分法考察任意初始条件对应的 TVC，应给出相应的求解框架，以便对于任何形式的初始条件均可以寻找到相应的 TVC。

利用变分求解 TVC 的基本思路是图形结合，需要根据各种形式对应的变分图形来确定参数方向，进而确定 TVC。

4.5.1 $(t_0,x(t_0)),(t_1,x(t_1))$ 给定

给定起点和终点，此时不需要 TVC，不需要讨论横截性条件。但是此时系统是否是存在最优解需要考察，参考 *Hamilton* 系统的正则化问题，保证系统存在最优解。

4.5.2 $(t_0,x(t_0)),t_1$ 给定，$x(t_1)$ 自由

给定起点条件和终点时刻，终点值并不明确，该问题是最标准的初值条件；下面给出该问题的详细处理过程。

首先，给定起点，最大化问题对应的变分表示为

$$\delta J^*=-\lambda(t_1)\delta x_1+H(t_1)\delta t_1\le 0$$

其中 $\lambda(t)$ 是 *Hamilton* 乘子，是状态变量 $x(t)$ 的边际值，$H(t_1)$ 是 t_1 时刻对应的 *Hamilton* 函数值。$\delta J^*\le 0$ 恒成立，为了判定横截性条件，现在要做的是对变分扰动 $\delta t_1,\delta x(t_1)$ 的取值方向进行判断。

给定结束时刻 t_1，可能的扰动只能在终点的取值进行变化，因此可知变分扰动 $\delta t_1=0$，$\delta x(t_1)$ 可正可负，因此对于变分 $\delta J^*=-\lambda(t_1)\delta x_1\le 0$，必然有 $\lambda^*(t_1)=0$，因此该初始条件对应的 TVC 表示为

$$\lambda^*(t_1)=0$$

4.5.3 $(t_0, x(t_0)), t_1$ 给定，$x(t_1) \geq a$

给定起点条件和终点时刻，终点值并不明确，对于终点值取值存在不等式约束。最大化问题对应的变分表示为

$$\delta J^* = -\lambda(t_1)\delta x_1 + H(t_1)\delta t_1 \leq 0$$

给定结束时刻 t_1，相应的 $\delta t_1 = 0$；分情况讨论 $x(t_1)$ 的可能取值：

1. 如果 $x^*(t_1) > a$，此时变分扰动 $\delta x(t_1)$ 可正可负，变分 $\delta J^* = -\lambda(t_1)\delta x_1 \leq 0$ 恒成立意味着：$\lambda^*(t_1) = 0$；

2. 如果 $x^*(t_1) = a$，此时变分扰动 $\delta x(t_1) \leq 0$（这是因为只能存在向上的扰动来保证大于约束值 a），变分 $\delta J^* = -\lambda(t_1)\delta x_1 \leq 0$ 恒成立意味着 $\lambda^*(t_1) \geq 0$；

综合上述两种情况可知该初始条件对应的 TVC 表示为

$$\lambda^*(t_1) \geq 0,\ x^*(t_1) \geq a,\ \lambda^*(t_1)(x^*(t_1) - a) = 0$$

4.5.4 $(t_0, x(t_0)), x^*(t_1)$ 给定，t_1 自由

给定起点和终止值，但是终止时间并不确定，最大化问题对应的变分表示为

$$\delta J^* = -\lambda(t_1)\delta x_1 + H(t_1)\delta t_1 \leq 0$$

给定终止值 $x^*(t_1)$，相应的不存在终止值的扰动，$\delta x(t_1) = 0$；对于时间的变分扰动 δt_1 可正可负，对于变分 $\delta J^* = H(t_1)\delta t_1 \leq 0$ 恒成立，意味着 $H^*(t_1) = 0$，因此该初始值对应的 TVC 表示为

$$H^*(t_1) = f^*(t_1, x^*(t_1), u^*(t_1)) + \lambda^*(t_1)g^*(t_1, x^*(t_1), u^*(t_1)) = 0$$

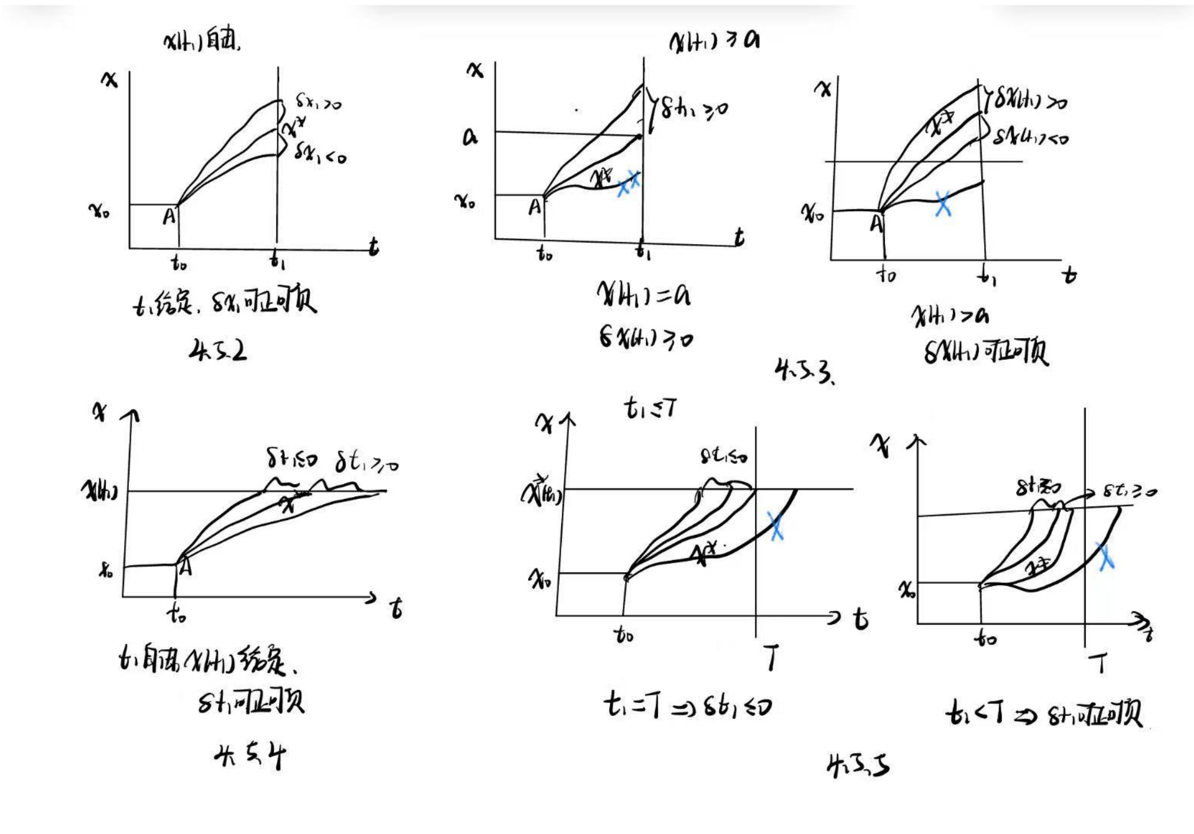


图 3: 横截性条件图形分析

4.5.5 $(t_0, x(t_0)), x^*(t_1)$ **给定，**$t_1 \leq T$

给定起点和终止值，终止时间并不确定，但是需要在 T 之前结束。最大化问题对应的变分表示为

$$\delta J^* = -\lambda(t_1)\delta x_1 + H(t_1)\delta t_1 \leq 0$$

给定终止值 $x^*(t_1)$，相应的不存在终止值的扰动，$\delta x(t_1) = 0$；分情况讨论时间的变分扰动：

1. 如果 $t_1 = T$，相应的变分扰动 $\delta t_1 \leq 0$（这是因为给定最大值约束，只存在左方向上的时间扰动），变分 $\delta J^* = H(t_1)\delta t_1 \leq 0$ 恒成立意味着 $H^*(t_1) \geq 0$；

2. 如果 $t_1 \leq T$，相应的变分扰动 δt_1 可正可负，变分 $\delta J^* = H(t_1)\delta t_1 \leq 0$ 恒成立意味着 $H^*(t_1) = 0$；

综合上述两种情况可知该初始条件对应的 TVC 表示为

$$H^*(t_1) \geq 0,\ t_1^* \leq T,\ H^*(t_1)(t_1^* - T) = 0$$

4.5.6 $(t_1, x(t_1))$ **满足** $K(t_1, x(t_1)) \geq 0$

给定最大化问题对应的变分

$$\delta J^* = -\lambda(t_1)\delta x(t_1) + H(t_1)\delta t_1 \leq 0$$

其中 $H(t_1)$ 表示 t_1 时刻对应的 *Hamilton* 函数。

如果 $K^*(t_1, x(t_1)) > 0$，相应的可行解 $K(t_1 + \delta t_1, x(t_1 + \delta t_1)) \geq 0$，定义变分 δK

$$\delta K = K(t_1 + \delta t_1, x(t_1 + \delta t_1)) - K^*(t_1, x(t_1)) = K_{t_1}^* \delta t_1 + K_{x_1}^* \delta x_1$$

可知 δK 可正可负，因此 $\delta t_1, \delta x(t_1)$ 可正可负。给定 $\delta J^* \leq 0$ 恒成立，可知必然有

$$\lambda(t_1) = 0,\ H(t_1) = 0$$

如果 $K^*(t_1, x(t_1)) = 0$, 相应的可行解 $K(t_1 + \delta t_1, x(t_1 + \delta t_1)) \geq K^*(t_1, x(t_1)) > 0$，定义变分 δK

$$\delta K = K(t_1 + \delta t_1, x(t_1 + \delta t_1)) - K^*(t_1, x(t_1)) = K_{t_1}^* \delta t_1 + K_{x_1}^* \delta x_1 \geq 0$$

给定 $\delta J^* \leq 0$ 恒成立，得到如下方程组

$$\begin{cases} K_{t_1}^* \delta t_1 + K_{x_1}^* \delta x_1 \geq 0 \\ -H(t_1)\delta t_1 + \lambda(t_1)\delta t_1 \geq 0 \end{cases}$$

根据 *Farkas* 引理可知，存在 $p \geq 0$ 使得

$$\begin{cases} K_{t_1}^* = -pH(t_1) \\ K_{x_1}^* = p\lambda(t_1) \end{cases}$$

相应的可以得到横截性条件

$$p \geq 0, K^*(t_1, x(t_1)) \geq 0, pK^*(t_1, x(t_1)) = 0$$

4.5.7 $(t_0, x(t_0)), t_1$ **给定，**$a \leq x(t_1) \leq b$

给定 $x(t_0) = x_0$, 最大化问题对应的变分

$$\delta J^* = -\lambda(t_1)\delta x(t_1) + H(t_1)\delta t_1 \leq 0$$

其中 $H(t_1)$ 表示 t_1 时刻对应的 *Hamilton* 函数。t_1 给定则意味着 $\delta t_1 = 0$, 仅需考虑 $\delta J^* = -\lambda(t_1)\delta x(t_1) \leq 0$ 恒成立；首先考察 $x(t_1) \geq a$，分以下两种情形分析:

1. 如果 $x(t_1)>a$，则 $\delta x(t_1)$ 可正可负，$\delta J^*=-\lambda(t_1)\delta x(t_1)\le 0$ 恒成立意味着 $\lambda^*(t_1)=0$；
2. 如果 $x(t_1)=a$，则 $\delta x(t_1)\ge 0$；$\delta J^*=-\lambda(t_1)\delta x(t_1)\le 0$ 恒成立 $\lambda^*(t_1)\ge 0$；

因此 $x(t_1)\ge a$ 对应的横截性条件为

$$\lambda^*(t_1)\ge 0; x^*(t_1)\ge a; \lambda^*(t_1)(x^*(t_1)-a)=0$$

其次考察 $x(t_1)\le b$，同理可以确定相应的横截性条件为

$$\lambda^*(t_1)\le 0; x^*(t_1)\le b; \lambda^*(t_1)(x^*(t_1)-b)=0$$

结合上述 TVC 可知，该初始条件对应的 TVC 表示为[21]

$$\lambda^*(t_1)\ge 0; x^*(t_1)\ge a; \lambda^*(t_1)(x^*(t_1)-a)=0$$
$$\lambda^*(t_1)\le 0; x^*(t_1)\le b; \lambda^*(t_1)(x^*(t_1)-b)=0$$

最终可以确定

$$\lambda^*(t_1)=0, a\le x^*(t_1)\le b$$

4.5.8 $(t_0, x(t_0))$ 给定，t_1 自由，$a\le x^*(t_1)\le b$

给定 $x(t_0)=x_0$，给定 $x(t_0)=x_0$, 最大化问题对应的变分

$$\delta J^*=-\lambda(t_1)\delta x(t_1)+H(t_1)\delta t_1\le 0$$

其中 $H(t_1)$ 表示 t_1 时刻对应的 *Hamilton* 函数。对于 $x(t_1)\ge a$，分为如下两种情况进行讨论：

1. 如果 $x^*(t_1)=a$，相应的有 $\delta x(t_1)=0$，对于 $\delta J^*=H(t_1)\delta t_1\le 0$ 恒成立，则有 $H^*(t_1)=0$；
2. 如果 $x^*(t_1)>a$，$\delta x(t_1)$ 可正可负，对于 $\delta J^*=-\lambda(t_1)\delta x(t_1)+H(t_1)\delta t_1\le 0$ 恒成立，则有 $\lambda^*(t_1)=0, H^*(t_1)=0$;

综上可知，对于 $x^*(t_1)\ge a$，横截性条件满足

$$\lambda^*(t_1)(x^*(t_1)-a)=0, H^*(t_1)=0$$

同理，对于对于 $x(t_1)\le b$，可以得到横截性条件为

$$\lambda^*(t_1)(x^*(t_1)-b)=0, H^*(t_1)=0$$

结合上述两种情况，TVC 表示为

$$\lambda^*(t_1)(x^*(t_1)-a)=0,\ \lambda^*(t_1)(x^*(t_1)-b)=0,\ H^*(t_1)=0$$

4.5.9 $t_1, x(t_1), t_0$ 给定，$x(t_0)$ 自由

给定终止条件以及初始时间，但是初始值并不确定，此时最大化问题对应的变分与给定起点条件的存在差异

$$\delta J^*=\lambda(t_0)\delta x(t_0)-H(t_0)\delta t_0\le 0$$

其中 $H(t_0)$ 表示 t_0 时刻对应的 *Hamilton* 函数。t_0 给定相应的 $\delta t_0=0$；变分扰动 $\delta x(t_0)$ 可正可负，$\delta J^*=\lambda(t_0)\delta x(t_0)\le 0$ 恒成立意味着 $\lambda^*(t_0)=0$，因此该问题的 TVC 表示为

$$\lambda^*(t_0)=0$$

[21]注意：TVC 是可以叠加的，因此面对多约束的复杂初始条件，可以分别讨论求解各自的 TVC，最后进行叠加和化简。

4.5.10 $t_1, x(t_1), t_0$ 给定，$x(t_0) \le b$

给定 $(t_1, x(t_1))$，最大化问题对应的变分给定为

$$\delta J^* = \lambda(t_0)\delta x(t_0) - H(t_0)\delta t_0 \le 0$$

其中 $H(t_0)$ 表示 t_0 时刻对应的 *Hamilton* 函数。t_0 给定相应的 $\delta t_0 = 0$，相应的有 $\delta J^* = \lambda(t_0)\delta x(t_0) \le 0$ 恒成立。对于 $x(t_0) \le b$ 分两种情况讨论：

1. 如果 $x(t_0) < b$，则 $\delta x(t_0)$ 可正可负，对于 $\delta J^* = \lambda(t_0)\delta x(t_0) \le 0$ 恒成立等价于 $\lambda(t_0) = 0$；
2. 如果 $x(t_0) = b$，则 $\delta x(t_0) \le 0$, 对于 $\delta J^* = \lambda(t_0)\delta x(t_0) \le 0$ 恒成立等价于 $\lambda(t_0) \ge 0$；

综合以上两种情况可以确定 TVC 表示为：

$$\lambda^*(t_0) \ge 0; x^*(t_0) \le b; \lambda^*(t_0)(x^*(t_0) - b) = 0$$

4.6 *Other Topics*

4.6.1 分段函数的极大值原理

前述讨论的 *Hamilton* 系统都是单一连续函数的优化，但是现实中存在很多分段函数的优化问题，例如经济转型问题，在不同经济时期社会目标存在差异，因而优化函数存在差异，导致在不同时期存在不同的 object 函数，下面讨论简单分段函数的 *Hamilton* 系统问题。

给定如下最优化问题

$$\begin{aligned} max_{u,x,\bar{t}} \int_{t_0}^{\bar{t}} f^1(t,x,u)dt &+ \int_{\bar{t}}^{t_1} f^2(t,x,u)dt \\ s.t. \dot{x} &= g^1(t,x,u), t_0 \le t \le \bar{t} \\ \dot{x} &= g^2(t,x,u), \bar{t} \le t \le t_1 \\ x(t_0) &= x_0, x(t_1) = x_1 \end{aligned}$$

变分相应的确定为

$$\begin{aligned} &\delta J^* = \delta J_1 + \delta J_2 \\ &\delta J_1 = \int_{t_0}^{\bar{t}} [f_x^* + \lambda^* g_x^* + \dot{\lambda}^*](x - x^*)dt + \int_{t_0}^{\bar{t}} (f_u^* + \lambda^* g_u^*)(u - u^*)dt \\ &\quad - \lambda^*(\bar{t})\delta x(\bar{t}) + H^*(\bar{t})\delta\bar{t} \end{aligned}$$

这种情况下 TVC 可以给定为

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\bar{t}^-} -\lambda^*(\bar{t})\delta\bar{t} &= \lim_{t\to\bar{t}^+} -\lambda^*(\bar{t})\delta\bar{t} \\ \lim_{t\to\bar{t}^-} H^*(\bar{t}) &= \lim_{t\to\bar{t}^+} H^*(\bar{t}) \end{aligned}$$

因此对于分段函数，必然需要满足在分段点左右两侧的变分取值是一致的，不能出现跳跃。

4.6.2 多状态多控制的极大值原理

此前的 *Hamilton* 系统中分析的只是单个控制变量 $u(t)$ 和单个状态变量 $x(t)$ 的情形，那么对于多个控制变量和多个状态变量的情形，*Hamilton* 系统还能够很好的进行处理吗？下面以两个状态变量和两个

控制变量的系统为例给出分析[22]：给定最优化问题

$$
\begin{aligned}
max \int_{t_0}^{t_1} f(t,x,y,u,v)dt \\
s.t. \dot{x}(t) = g(t,x,y,u,v) \\
\dot{y}(t) = h(t,x,y,u,v) \\
y(t_0) = y_0, x(t_0) = x_0
\end{aligned}
$$

最优解对应的值函数表示为

$$
\begin{aligned}
J^* &= \int_{t_0}^{t_1} f^*(t,x,y,u,v)dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} [f^* + \lambda^*(t)g^* + \mu^*(t)h^* + \dot{\lambda}^*x^* + \dot{\mu}^*y^*]dt \\
&- \lambda^*(t_1)x^*(t_1) + \lambda^*(t_0)x^*(t_0) + \mu^*(t_1)y^*(t_1) - \mu^*(t_0)y^*(t_0)
\end{aligned}
$$

其中 $\lambda(t), \mu(t)$ 是 *Hamilton* 乘子，分别表示 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的边际值。对于任意值相应的有

$$
\begin{aligned}
J = \int_{t_0}^{t_1} [f + \lambda(t)g + \mu(t)h + \dot{\lambda}x + \dot{\mu}y]dt \\
- \lambda(t_1)x(t_1) + \lambda(t_0)x(t_0) + \mu(t_1)y(t_1) - \mu(t_0)y(t_0)
\end{aligned}
$$

取 $\lambda = \lambda^*$，相应的最大化问题转化为

$$
\begin{aligned}
J - J^* = &\int_{t_0}^{t_1} [f_x + \lambda g_x + \mu h_x + \dot{\lambda}](x - x^*)dt + \int_{t_0}^{t_1} [f_y + \lambda g_y + \mu h_y + \dot{\mu}](y - y^*)dt \\
&+ \int_{t_0}^{t_1} [f_u + \lambda g_u + \mu h_u](u - u^*)dt + \int_{t_0}^{t_1} [f_v + \lambda g_v + \mu h_v](v - v^*)dt \\
&- \lambda(t_1)\delta x(t_1) - \mu(t_1)\delta y(t_1) + H(t_1)\delta t_1 \\
&\leq 0
\end{aligned}
$$

其中 $H(t_0)$ 表示 t_0 时刻对应的 *Hamilton* 函数。根据极大值原理，给定最优性条件和 *Euler* 方程，进一步得到

$$
\delta J^* = -\lambda(t_1)\delta x(t_1) - \mu(t_1)\delta y(t_1) + H(t_1)\delta t_1 \leq 0
$$

该式给出了 *TVC* 判定的基本方程，给定不同的起点和终点约束，该式可以确定相应的横截性条件，因此 *Hamilton* 系统依旧适用。

4.6.3 带贴现的 *Hamilton* 系统

对于最大化问题

$$
\begin{aligned}
max \int_{t_0}^{t_1} f(t,x,u)e^{-rt}dt \\
s.t.\ \dot{x} = g(t,x,u), x(t_0) = x_0
\end{aligned}
$$

一般而言定义 *Hamilton* 函数得到

$$
\mathcal{H} = f(t,x,u)e^{-xt} + \lambda(t)g(t,x,u)
$$

[22]状态变量和控制变量的个数不需要对应，没有任何约束。

其中 $\lambda(t)$ 表示 *Hamilton* 乘子，表示状态变量 $x(t)$ 的边际值。注意到这里定义的 *Hamilton* 系统是贴现值对应的系统，效用函数使用 e^{-rt} 进行贴现处理，因此构造的事贴现值的 *Hamilton* 系统。

存在另一种建立在当前值基础上的 *Hamilton* 系统：

$$\hat{\mathcal{H}} = f(t,x,u) + \mu(t)g(t,x,u)$$

其中 $\mu(t)$ 表示 *Hamilton* 乘子，表示状态变量 $x(t)$ 当前的边际值。在该系统中有 $H = e^{-rt}\hat{H}, \lambda(t) = \mu(t)e^{-rt}$，即常规使用的 *Hamilton* 系统是贴现处理后的系统。注意到，两个系统定义在不同的经济状态中，因而经济含义存在差异，实际求解也会存在相应的差异（贴现差异）。但是两种方法都是可行的，都可以给出最优性条件。注意到当前值的最优值条件给定为（尤其需要注意 *Euler* 方程）

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial u} = f_u + \mu g_u = 0$$
$$\dot{\lambda} = \dot{\mu}e^{-rt} - r\mu e^{-rt} = -\frac{\partial \hat{H}e^{-rt}}{\partial x} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial x}e^{-rt}$$
$$\to \dot{\mu}(t) = r\mu - \frac{\partial \hat{H}}{\partial x}$$

以中央计划者的 *Ramsey Model* 为例给出两个系统的差异性：定义在贴现值上的 *Hamilton* 系统给定为

$$H = u(c)e^{-\beta t} + \lambda(t)[f(k) - nk - c]$$
$$\lambda(t) = u'(c)e^{-\beta t}$$

可以清晰的看出乘子 $\lambda(t)$ 表示贴现后效用边际值。

定义在当前值的 *Hamilton* 系统给定为

$$\bar{H} = u(c) + \mu(t)[f(k) - nk - c]$$
$$\mu(t) = u'(c)$$

乘子 $\mu(t)$ 表示当前值对应的效用边际值。

4.6.4 *Hamilton* 系统的正则化问题

给定起点和终点条件，虽然不需要给出 TVC，但是却存在无解的情况，这是因为该系统尚不完备，为此需要定义完备的 *Hamilton* 系统：

$$\mathcal{H} = \lambda_0 f(t,x,u)e^{-xt} + \lambda_1 g(t,x,u)$$

其中 λ_0, λ_1 是 *Hamilton* 乘子，λ_1 表示状态变量 $x(t)$ 的边际值，λ_0 表示判别系统是否正则参数，$\lambda_0 = 1$ 表示系统为正则系统，否则为非正则系统；因此完备的 *Hamilton* 系统不仅给出了最优性条件，还给出了系统正则性的判断。此时最优性条件给定位：

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \lambda_0 f_u + \lambda_1 g_u = 0$$
$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} = -(\lambda_0 f_x + \lambda_1 g_x)$$
$$\lambda_0 = 0 \ or \ 1$$

最后条件用于判定系统正则性，同时保证解的存在性。

Case:给定如下系统

$$max \int_0^T udt, \ \dot{x} = u^2, \ x(0) = x(T) = 0$$

一般的 Hamilton 系统得到最优解表示为

$$x(t) = \frac{t}{4\lambda^2} + c$$

其中 $x(0) = 0$ 表示 $c = 0$，进一步 $x(T) = 0 \to \frac{T}{4\lambda^2} \neq 0$，无解！传统方法得到了无解的情形，这个时候需要考虑该系统是不是完备的，是不是非正则的。重新定义函数

$$H = \lambda_0 u + \lambda u^2$$

其中 $\lambda_0 = 0$，该系统为非正则系统，从而最终可以确定最优解表示为 $x^(t) = 0$。

4.6.5 包含代数约束的 Hamilton 系统

对于标准的 *Hamilton* 系统，存在如下代数约束

$$h(t, x, u) \geq 0$$

定义新的 *Hamilton* 函数（*Hamilton* 函数与 *Lagrange* 函数叠加）

$$H = f(t, x, u) + \lambda g(t, x, u) + \mu h(t, x, u)$$

其中 λ, μ 分别表示 *Hamilton* 乘子（状态变量的边际值）和 *Lagrange* 乘子；

给定初始条件 $x(t_0) = t_0, t_1$ 给定，最优解满足：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial u} &= f_u + \lambda g_u = 0 \\
\dot{\lambda} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -(f_x + \lambda g_x + \mu h_x) \\
TVC &: \lambda(t_1) = 0 \\
KT &: \mu^* \geq 0, h^* \geq 0, \mu^* h^* = 0
\end{aligned}$$

相应的 *Hamilton* 乘子（状态变量的边际值）和 *Lagrange* 乘子需要分别满足横截性条件以及松弛性条件（如果是等式自发成立）。

***proof*:** 对于可行解 (x, u)，满足

$$\begin{aligned}
J &= \int_{t_1}^{t_1} [f(t, x, u) + \mu^* h(t, x, u)] dt \\
&= \int_{t_1}^{t_1} [f + \mu^* h + \lambda g + \dot{\lambda} x] dt \\
&- \lambda(t_1) x(t_1) + \lambda(t_0) x(t_0)
\end{aligned}$$

其中存在 u^* 满足松弛条件 $\mu^* h(t, x, u) = 0$。变分表示为

$$\begin{aligned}
\delta J^* = &\int_{t_1}^{t_1} [f_x + \mu^* h_x + \lambda g_x + \dot{\lambda}](x - x^*) dt + \int_{t_1}^{t_1} [f_u + \mu^* h_u + \lambda g_u](u - u^*) dt \\
&- \lambda(t_1) \delta x(t_1) + H(t_1) \delta t_1
\end{aligned}$$

Case: 考虑人力资本和物质资本的 *Rsmsey Model*：投资用来增加人力资本和物质资本投资（不考虑政府行为）

$$\dot{K} + \dot{H} = I = F(K, L) - C$$

相应的转化为

$$
\begin{aligned}
& max \int u(c)e^{-\rho t}dt \\
& s.t.\ \dot{K} + \dot{H} = F(K, L) - C, k_0, H_0
\end{aligned}
$$

上述模型并非两部门模型，人力资本和物质资本是同质的；其中控制变量为 c，状态变量为 K, H。该问题的求解可以采用如下两种思路：引入新的状态变量或者引入新的控制变量。

Method 1：引入控制变量 y 表示用于人力资本积累的部分：

$$
\dot{H} = y, \dot{K} = F(K, L) - C - y
$$

最优化问题转化为

$$
\begin{aligned}
& max_{c,y} \int u(c)e^{-\rho t}dt \\
& s.t.\ \dot{K} = F(K, L) - C - y, \dot{H} = y
\end{aligned}
$$

定义 *Hamilton* 系统（两种状态和两种控制的标准问题）

$$
\hat{H} = u(c)e^{-\rho t} + \lambda[F(K, L) - C - y] + \mu y
$$

其中 $\lambda\ \mu$ 是 *Hamilton* 乘子，表示物质资本和人力资本的边际值，最优条件下两种资本边际值一定相等。最大值原理给出如下最优值条件：

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial \hat{H}}{\partial C} = 0, \frac{\partial \hat{H}}{\partial y} = 0 \\
& \dot{\lambda} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial K} \\
& \dot{\mu} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial y} \\
& \lambda(T) \geq 0, K(T) \geq 0, \lim \lambda(T)K(T) = 0 \\
& \mu(T) \geq 0, H(T) \geq 0, \lim \mu(T)H(T) = 0
\end{aligned}
$$

Method 2：引入状态变量 $W = K + H$ 用于表示总资本，相应的转化为

$$
\dot{W} = F(K, L) - C,\ W = K + L
$$

其中控制变量为 C, K, H（物质资本和人力资本在总资本中的相对份额可以改变），状态变量为 W。此时将 K, H 转化为 W 和线性代数约束，重新定义包含线性约束的 *Hamilton* 系统：

$$
\hat{H} = u(c)e^{-\rho t} + \lambda[F(K, L) - C] + \mu(K + H - W)
$$

其中 λ 是 *Hamilton* 乘子，表示 W 的边际值；μ 是 *Lagrange* 乘子。最优解条件给定为

$$
\begin{aligned}
& contral: \ \frac{\partial \hat{H}}{\partial C} = 0,\ \frac{\partial \hat{H}}{\partial K} = 0,\ \frac{\partial \hat{H}}{\partial H} = 0 \\
& state: \ \dot{\lambda} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial W} \\
& \dot{W} = F(K, L) - C,\ W = K + L \\
& TVC: \lambda(T) \geq 0, W(T) \geq 0, \lambda(T)W(T) = 0 \\
& KT: \mu(K + H - W) = 0
\end{aligned}
$$

其中松弛条件对于等式约束自然成立。最优条件下必然有 $F_K = F_H$，两种资本的边际生产率必然相等（资本回报必然相等）。

4.6.6 结语：最优控制工具的问题

给定目标函数和状态变量积累方程，个体可以在 t_0 决定未来的状态变量选择，这意味着**个体具有无穷的 *commitment* 承诺能力**因而具有完全的决定能力，这与实际不符；另一方面最优控制无法解决**时间不一致问题**，只要是动态决策必然存在时间不一致，但是在最优控制中只能存在时间一致性，即在 t_0 时刻的解在无穷远 T 时刻最优解保持一致性（最优解在每个子区间内也是最优解）。

对于时间不一致问题，*Phelps and Pollak(1968RES)*[23]首先引入 *Quasi-Hyperbolic Discounting*，不同时期的贴现因子[24]是不一致的，因此个体在不同时期进行决策所面临的贴现因子不同（目标函数不同），时间不一致性自然产生。简单描述为：在 t_0 时刻决策表示为

$$u(c_0)+\beta\delta u(c_1)+\beta\delta^2u(c_2)+\cdots=u(c_0)+\beta\sum_{i=1}\delta^iu(c_i)$$

其中 β 表示贴现因子，δ 表示不同时期贴现的调整；在 t_1 时刻决策表示为

$$u(c_1)+\beta\delta u(c_2)+\beta\delta^2u(c_3)+\cdots=u(c_1)+\beta\sum_{i=1}\delta^iu(c_{i+1})$$

因此个体在不同时期进行决策的目标函数并不一致。连续形式转化（*Barro,1999QJE*）[25]为

$$max\int_0^\infty u(c)e^{-\beta^t\int_0^t\phi(v)dv}dt$$

或者可以转化为如下形式：不同时期的贴现因子不同因而面对的目标函数不同

$$max\int_0^h u(c)e^{-\beta t}dt+\delta\int_h^\infty u(c)e^{-\beta t}dt$$

[23]E. S. Phelps, R. A. Pollak, On Second-Best National Saving and Game-Equilibrium Growth, *The Review of Economic Studies*, Volume 35, Issue 2, April 1968, Pages 185–199。

[24]关于贴现因子的经典文献：Gary S. Becker, Casey B. Mulligan, The Endogenous Determination of Time Preference, *The Quarterly Journal of Economics*, Volume 112, Issue 3, August 1997, Pages 729–758

[25]Robert J. Barro, Ramsey Meets Laibson in the Neoclassical Growth Model, *The Quarterly Journal of Economics*, Volume 114, Issue 4, November 1999, Pages 1125–1152.

5 动态规划：*Bellman* 方程

5.1 确定性连续时间动态规划

5.1.1 动态规划基本原理

动态规划的基本思路是将动态问题静态化，工具就是值函数。定义任意 $s \in [0,T]$ 的值函数给定为：从 s 时刻初始值 x_s 出发的值函数

$$J(s,x_s) = max_{u(t),s\le t\le T}[\int_s^T f(t,x,u)dt] \ s.t. \ \dot{x} = g(t,x,u), x(t_s) = x_s$$

注意此处最优化的对象是控制变量 $u(t)$，这与最优控制中是一致的，状态变量只能通过控制变量实现，因此最优化的目标是控制变量。下面开始处理值函数

$$J(s,x_s) = max_{u(t),s\le t\le T}[\int_s^{s+\Delta s} f(t,x,u)dt + \int_{s+\Delta s}^T f(t,x,u)dt]$$

根据积分中值定理和 *Taylor* 展开得到

$$\begin{aligned}
\int_s^{s+\Delta s} f(t,x,u)dt = f(\bar{s},x(\bar{s}),u(\bar{s}))\Delta s \\
&= f(s,x(s),u(s))\Delta s + [f_t\Delta s + f_x\dot{x}\Delta s + f_u\dot{u}\Delta s]\Delta s + o(\Delta s) \\
&\underbrace{=}_{Taylor} f(s,x(s),u(s))\Delta s + o(\Delta s)
\end{aligned}$$

其中 $\bar{s} \in (s, s+\Delta s)$ 表示积分中值，*Taylor* 展开中高阶无穷小暂时保留。值函数转化为

$$\begin{aligned}
J(s,x_s) &= max_{u(t),s\le t\le T}[\int_s^{s+\Delta s} f(t,x,u)dt + \int_{s+\Delta s}^T f(t,x,u)dt] \\
&= max_{u(t),s\le t\le T}[f(s,x(s),u(s))\Delta s + max_{s+\Delta s\le t\le T}\int_{s+\Delta s}^T f(t,x,u)dt] + o(\Delta s) \\
&= max_{u(t),s\le t\le T}[f(s,x(s),u(s))\Delta s + J(s+\Delta s, x(s+\Delta s))] + o(\Delta s)
\end{aligned}$$

其中第 2 步中最大值 max 放入括号内利用最优性原理；上式给出了动态规划方法最核心的思路：将不同时期的值函数 $J(s,x)$ 和 $J(s+\Delta s, x_s+\Delta x_s)$ 放到一起，从而将动态问题转化为静态优化问题，这是动态规划最重要的一步，各种问题下动态规划的推导都需要根据将值函数根据积分迭代转化为下式（在随机连续动态优化中还会重复推导值函数迭代的方法）：

$$J(s,x_s) = max_{u(t),s\le t\le T}[f(s,x(s),u(s))\Delta s + J(s+\Delta s, x(s+\Delta s))] + o(\Delta s)$$

现在并不确定 $J(s+\Delta s, x(s+\Delta s))$，的目标是将动态问题转化为当下的静态问题，因此需要对该变量在当前值处进行线性化展开；根据 *Taylor* 展开得到

$$J(s+\Delta s, x(s+\Delta s)) = J(s,x_s) + J_s(s,x_s)\Delta s + J_x(s,x_s)\Delta x_s + o(\Delta s)$$

带回值函数的表达式可以得到

$$\begin{aligned}
J(s,x_s) &= max_{u(t),s\le t\le T}[f(s,x(s),u(s))\Delta s + J(s,x_s) + J_s(s,x_s)\Delta s + J_x(s,x_s)\Delta x_s + o(\Delta s)] \\
&= J(s,x_s) + max_{u(t),s\le t\le T}[f(s,x(s),u(s))\Delta s + J_s(s,x_s)\Delta s + J_x(s,x_s)\Delta x_s + o(\Delta s)]
\end{aligned}$$

两侧除以 Δs，可以得到 $\frac{\Delta x_s}{\Delta s} = \dot{x}_s = g(s,x(s),u(s))$，因此值函数可以简化为

$$0 = max_{u(s)}[f(s,x(s),u(s)) + J_s(x,x_s) + J_x(s,x_s)g(s,x(s),u(s))]$$

这里需要注意：此时将时间全部转化为当下的初始值 s 时刻，从而将动态问题完全转化为静态优化问题，这是动态规划方法的关键所在；相应的，此时的优化对象不再是动态的控制变量 $u(t)$，而是转变为 s 时刻的控制变量 $u(s)$，这是从动态问题到静态问题的关键一步。

对于该静态优化问题，一方面需要求解上述优化问题，另一方面最优值等于 0。把上式称为递归方程 *recursive equation*。求解该问题等价于静态优化的一阶条件得到 $u(s)$ 的隐函数关系是，回带 *recursive equation*，就可以得到 *Bellman Equation*，从而可以通过数值解或者猜解的方法求解动态优化问题。下面给出确定性连续动态优化的基本形式。

给定动态规划，需要遵循如下步骤：

1. 定义值函数 $J(s, x_s)$，根据目标函数和约束函数构造值函数形式；
2. 根据值函数，定义递归方程(*recursive equation*)：$0 = max_{u(s)}[f(s, x(s), u(s)) + J_s(x, x_s) + J_x(s, x_s)g(s, x(s), u(s))]$；
3. 求解递归方程：递归方程对于状态变量 $u(s)$ 求解一阶偏导确定 $u(s)$ 的隐函数表达形式，回带递归方程给出 *Bellman Equation*；
4. 求解值函数：根据 *Bellman Equation*，采用数值解法或者猜解的形式进行求解；以猜解为例，给定 *Bellman Equation* 和目标函数、约束函数的形式，利用待定系数方法确定值函数的表达式；

Solution：定义值函数

$$J(s, x_s) = max_{u(t), s \leq t \leq T}[\int_s^T f(t, x, u)dt] \ s.t. \ \dot{x} = g(t, x, u), x(t_s) = x_s$$

根据值函数得到递归方程

$$0 = max_{u(s)}[f(s, x(s), u(s)) + J_s(s, x_s) + J_x(s, x_s)g(s, x(s), u(s))]$$

注意：此时方程全部关于时间 s，不包含动态的 t，需要全部换算为 s 的形式。递归方程对 u 求导数，可以得到最优解 u

$$f_u(t, x, u) + J_x(s, x_s)g_u(t, x, u) = 0 \rightarrow u = u(x_s)$$

其次将 $u = u(x_s)$（隐函数形式）回带递归方程，得到 ***Bellman Equation***

$$0 = f(s, x(s), u(x_s)) + J_s(s, x_s) + J_x(s, x_s)g(s, x(s), u(x_s))$$

上述方程为关于 s 的偏微分方程；通过 *Bellman Equation* 求解值函数，并进一步求解 u, x。注意到，通过动态规划给出的最优性条件和通过最优控制给出的事完全一致的，事实上，只需要令 $\lambda = J_x$，最优性条件即可得到满足。对 *Bellman Equation* 求导也可以确定欧拉方程，因此确定性连续动态优化问题下两种方法是等价的。

问题的关键一步在于给定 *Bellman Equation* 确定值函数！一般而言偏微分方程问题的显式解难以确定，需要采用数值解法；在本节的内容中，给出几种简单的可供猜解的形式。

下面给出常用的猜解形式：如果目标函数（效用函数）满足 *CRRA*，*CARA*，二次型或者 *HARA* 形式，约束函数（生产函数）满足线性形式，则可以利用猜解的方法确定值函数的形式。如何猜？给出如下两条经验法则：

- 假定值函数形式与目标函数形式相一致，例如均为 CRRA 形式，不同的是值函数中包含待定系数，需要借助 *Bellman Equation* 决定系数取值；
- 假定控制变量和状态变量具有线性关系，即 $u(t) = Ax(t)$；

- 一般的猜解需要从最简单的形式出发，例如线性关系，先从正比例关系 AX 开始猜，如果 *Bellman Equation* 中无法得到解，再用 $Ax+b$ 的形式进行猜解；考虑到偏微分方程的复杂形式，猜解是不断尝试的过程，只有经验法则而没有严格的定理；对于过于复杂或者高阶的偏微分方程，直接采用数值算法求解；

当然，求解值函数不是最终目标，最终目标是确定 $u(t), x(t)$ 的最优动态路径，一般的在求解值函数的过程中可以求解 $u(t)$，这因为值函数本身就是最优化控制变量 $u(t)$ 的过程，借助控制变量可以确定状态变量的路径 $x(t)$。

Case: 给定如下最优化问题

$$max \int_0^{\infty} (ax^2+bu^2)e^{-rt}dt$$
$$s.t.\ \dot{x}=u, x(0)=c>0$$

首先定义从 s 时刻出发的值函数

$$J(s,x_s)=max_{u(t),s\leq t\leq T}\int_s^{\infty}(ax^2+bu^2)e^{-rt}dt, \dot{x}=u, x(s)=x_s$$

根据值函数得到递归方程

$$0=(ax^2+bu^2)e^{-rs}+J_s(x,x_s)+J_x(s,x_s)u$$

对于控制变量 u 求一阶偏导得到 $u(s)$ 的表达式

$$2bue^{-rt}+J_x(s,x_s)=0\rightarrow u(s)=-\frac{J_x(s,x_s)}{2b}e^{rt}$$

回带递归方程得到 *Bellman Equation*

$$0=(ax^2+b[-\frac{J_x(s,x_s)}{2b}e^{rt}]^2)e^{-rs}+J_s(x,x_s)+J_x(s,x_s)[-\frac{J_x(s,x_s)}{2b}e^{rt}]$$
$$\rightarrow 0=ax^2e^{-rs}+J_s(s,x_s)-\frac{J_x^2(s,x_s)}{4b}e^{rs}$$

现在考虑到目标函数是二次型形式，约束函数是线性形式，采用猜解的形式进行求解：嘉定值函数与目标函数具有相同的形式，从最简单的二次型开始猜（只有二次项），假定值函数形式为

$$J(s,x_s)=Ax_s^2e^{-rs}$$

据此可以分别得到 $J_s=-rAx_s^2e^{-rs}, J_x=2Ax_se^{-rs}$，代入 *Bellman Equation* 得到

$$A=\frac{1}{2}[-r+(r^2+4a/b)^{1/2}]b$$

从而可以确定值函数的形式；根据 $u(s)$ 的形式可以确定

$$u(t)=-\frac{J_x(s,x_s)}{2b}e^{rt}=-Ax/b$$

通过约束方程可知

$$\dot{x}=u=-Ax/b\rightarrow x(t)=x_0e^{-At/b}$$

5.1.2 利用动态规划方法求解 Rsmsey Model

给定中央计划者问题下的 *Rsmsey Model*:

$$max\int_0^{\infty}u(c)e^{-\beta t}\ s.t.\ \dot{k}=f(k)-nk-c, k_0$$

其中控制变量为 $c(t)$，状态变量为 $k(t)$；定义值函数

$$J(s,k_s)=max_{k(t),s\leq k\leq\infty}\int_s^\infty u(c)e^{-\beta t}\ s.t.\ \dot{k}=f(k)-nk-c,k_0$$

根据值函数形式可以确定递归方程

$$0=u(c_s)e^{-\beta s}+J_s(s,k_s)+J_k(s,k_s)[f(k_s)-nk_s-c_s]$$

递归方程对控制变量 c 求解一阶偏导得到

$$u'(c)e^{-\beta s}-J_k(s,k_s)=0$$

给定效用函数的形式，上式可以确定控制变量的函数形式 $c(s)$。

假定生产函数满足 $f(k)=Ak$，效用函数满足 $u(c)=\frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$，此时目标函数和约束函数满足猜解的形式，假定值函数形式为

$$J(s,k_s)=\frac{Bk^{1-\sigma}}{1-\sigma}e^{-\beta s},J_s=-\beta\frac{Bk^{1-\sigma}}{1-\sigma}e^{-\beta s},J_k=Bk^{-\sigma}e^{-\beta s}$$

根据一节条件可以确定 $c=B^{-\frac{1}{\sigma}}k$，代入递归方程得到

$$B=[\frac{(\sigma-1)(A-n)+\beta}{\sigma}]^{\frac{1}{\sigma}}$$

相应的消费表示为

$$c(t)=B^{-\frac{1}{\sigma}}k(t)$$

根据约束条件得到

$$\dot{k}(t)=(A-n-B^{-\frac{1}{\sigma}})k(t)\rightarrow k(t)=k_0e^{(A-n-B^{-\frac{1}{\sigma}})t}$$

5.1.3 确定性连续动态优化方法的等价性

连续时间的动态优化问题下,极大值原理和动态规划方法是等价的,可以相互导出。以 *Ramsey Model* 为例：考察中央计划者的 *Ramsey Model*，给定标准形式

$$max\int_0^\infty u(c)e^{-\beta t}\ s.t.\ \dot{k}=f(k)-nk-c,k_0$$

定义值函数

$$J(s,k)=max_{c(t),s\leq t\leq\infty}\int_s^\infty u(c)e^{-\beta t}dt,\dot{k}=f(k)-nk-c,k_0$$

得到迭代方程

$$0=max_{c(s)}[u(c)e^{-\beta s}+J_s(s,k)+J_k(s,k)(f(k)-nk-c)$$

关于 $c(s)$ 的一阶条件等价于

$$u'(c)e^{-\beta s}=J_k(s,k)\rightarrow c(s)=\hat{c}$$

回带递归方程得到 *Bellman* 方程

$$0=u(\hat{c})e^{-\beta s}+J_s(s,k)+J_k(s,k)(f(k)-nk-\hat{c})$$

Bellman 方程对 k 求偏导得到

$$0 = J_{sk}(s,k) + J_{kk}(s,k)(f(k) - nk - c) + J_k(s,k)(f'(k) - n)$$

一阶条件对于时间偏导得到

$$u''(c)\dot{c}e^{\beta s} - \beta u'(c)e^{-\beta s} = J_{ks}(s,k) + J_{kk}(s,k)\dot{k} = J_{ks}(s,k) + J_{kk}(s,k)[f(k) - nk - c]$$

上述两式联立得到

$$u''(c)\dot{c}e^{\beta s} - \beta u'(c)e^{-\beta s} = -J_k(s,k)(f'(k) - n) = -u'(c)e^{\beta s}(f'(k) - n)$$
$$\rightarrow \dot{c} = -\frac{u'(c)}{u''(c)}[f'(k) - n - \beta]$$

因此从 *Bellman* 方程可以导出极大值原理。

在 *Ramsey Model* 模型中两者等价是因为模型中 β（贴现因子）是常数，个体的承诺能力差异无法体现，因此在长期内动态规划和极大值原理得到的结论一致；如果 β 拓展为非常数形式，动态规划与极大值原理的结论存在差异。动态规划是只知道当期从而仅决定下一期，个人的承诺能力并不重要；但是极大值原理要求个体的承诺能力无限强，从而能够在当期决定未来的所有路径。*Barro,1999QJE*[26]考察了 *Hyperbolic* 双曲函数的动态优化问题，区分人的承诺能力有限、承诺能力无限以及没有承诺能力三种情形对于经济的影响，此时极大值原理和动态优化方法存在方法论上的显著差异。

5.1.4 包含贴现问题的动态规划

贴现是经济中考虑跨期问题最常见的形式，下面考察存在贴现时动态规划值函数的另一种表达形式。给定包含贴现的动态优化问题

$$max \int_0^T f(x,u)e^{-\beta t}dt$$
$$s.t.\ \dot{x} = g(x,u), x_0$$

在这里假定所有与时间有关的影响体现在贴现 $e^{-\beta t}$，目标函数 $f(x,u)$ 和约束函数 $g(x,u)$ 均与时间无关，上述系统称为**自治系统**。一般而言，经济中常用的系统都是自治系统。首先利用传统的动态规划方法求解该问题：定义值函数

$$J(s,x) = max_{u(t),s\le t\le T} \int_s^T f(x,u)e^{-\beta t}dt, \dot{x} = g(x,u), x_0$$

递归方程表示为

$$0 = max_{u(t),s\le t\le T}[f(x,u)e^{-\beta s} + J_s(s,x) + J_x(s,x)g(x,u)]$$

注意到，在这里值函数表示为每一期的目标函数全部按照 $e^{-\beta t}$ 贴现到初始时期，因此该值函数表示的经济意义是贴现值的值函数。

相应的，定义当前期对应的值函数：

$$J(s,x) = max \int_s^T f(x,u)e^{-\beta(t-s)}dte^{-\beta s} = V(s,x)e^{-\beta s} = V(x)e^{-\beta s}$$
$$V(x) = max \int_s^T f(x,u)e^{-\beta(t-s)}dt$$

[26]Barro, R. (1999). Ramsey Meets Laibson in the Neoclassical Growth Model. *Quarterly Journal of Economics* , November.

可以证明：$V(s,x)$ **与时间 s 无关，即** $V(s,x)=V(x)$（对于自治系统结论成立，非自治系统不一定）。重新代入迭代方程得到

$$
\begin{aligned}
0 &= max[f(x,u)e^{-\beta s}+(-\beta e^{-\beta s}V(x))+V'(x)e^{-\beta s}g(x,u)] \\
\rightarrow \beta V(x) &= max_{u(s)}[f(x,u)+V'(x)g(x,u)]
\end{aligned}
$$

其中 $V(s)$ 表示当前值的值函数，表示将未来值贴现到当下时间 t 而非初始时期的值函数，与 $J(s,x)$ 存在明显差异。上述形式在经济学文献中得到了更广泛的使用，相对于传统形式更加方便和灵活。

5.1.5 确定性动态优化中的多状态多控制问题

将单控制单状态的最简单形式的随机动态优化拓展到多状态多控制问题，给出一般形式的推导过程。一般的，给定多状态多控制问题

$$
\begin{aligned}
max \ & \int f(t,x,y,u,v)dt \\
s.t.\ & \dot{x}=g(t,x,y,u,v), \\
& \dot{y}=h(t,x,y,u,v),\ x_0,y_0
\end{aligned}
$$

定义值函数

$$
\begin{aligned}
J(s,x_s,y_s) &= max\int_s^T f(t,x,y,u,v)dt \\
&= max\int_s^{s+\Delta s} f(t,x,y,u,v)dt+\int_{s+\Delta s}^T f(r,x,y,u,v)dt
\end{aligned}
$$

迭代方程表示为

$$
0=max[f(t,x,y,u,v)+J_s(s,x,y)+J_x(s,x,y)g(t,x,y,u,v)+J_y(s,x,y)h(t,x,y,u,v)]
$$

5.1.6 *Quasi-Hyperbolic* 问题

Hyperbolic 双曲函数的动态优化问题（*Barro,1999QJE*[27]：区分人的承诺能力有限、承诺能力无限以及没有承诺能力三种情形对于经济的影响）没有统一的动态规划形式，但是针对 *Quasi-Hyperbolic* 问题，存在统一的动态规划形式，下面给出从传统动态规划方法到 *Quasi-Hyperbolic* 问题下动态规划的推广。*Quasi-Hyperbolic* 问题之所以重要，是因为一旦考虑到政府的动态不一致问题，动态优化需要面对不同的目标函数或者不同的贴现值，因此处理 *Quasi-Hyperbolic* 问题具有重要的政策含义。

考察 *Quasi-Hyperbolic* 问题，基本形式给定为

$$
\begin{aligned}
max \ & \int_0^h f(t,x,u)e^{-\beta t}dt+\delta\int_h^\infty f(t,x,u)e^{-\beta t}dt \\
s.t.\ & \dot{x}=g(t,x,u),x_0
\end{aligned}
$$

其中，从 $(0,h)$ 贴现因子为 $e^{-\beta t}$，在 (h,∞) 贴下因子为 $\delta e^{-\beta t}$，两个时期的目标函数是一致的；现在给出该问题的动态规划形式。

处理该问题之前，回顾动态规划的基本思路：将不同时期的值函数放到一起然后利用线性展开的方法，将动态问题转化为静态优化问题，所以需要将值函数 $J(s,x_s)$ 和 $J(s+\Delta s,x_s+\Delta x_s)$ 放入同一个值

[27]Barro, R. (1999). Ramsey Meets Laibson in the Neoclassical Growth Model. *Quarterly Journal of Economics* , November.

函数关系中进行迭代，导出迭代方程。定义 *Quasi-Hyperbolic* 问题的值函数

$$
\begin{aligned}
J(s,x_s) &= max_{u(t)}[\int_s^{s+h} f(t,x,u)e^{-\beta t}dt + \delta\int_{s+h}^{\infty} f(t,x,u)e^{-\beta t}dt] \\
&= max_{u(t)}[\int_s^{s+\Delta s} f(t,x,u)e^{-\beta t}dt + \int_{s+\Delta s}^{s+h} f(t,x,u)e^{-\beta t}dt + \delta\int_{s+h}^{\infty} f(t,x,u)e^{-\beta t}dt]
\end{aligned}
$$

另外定义值函数 $J(s+\Delta s, x_s+\Delta x_s)$：

$$
J(s+\Delta s, x_s+\Delta x_s) = max_{u(t)}[\int_{s+\Delta s}^{s+\Delta s+h} f(t,x,u)e^{-\beta t}dt + \delta\int_{s+\Delta s+h}^{\infty} f(t,x,u)e^{-\beta t}dt]
$$

将 $J(s+\Delta s, x_s+\Delta x_s)$ 表达式代入值函数表达式中进行迭代处理

$$
\begin{aligned}
J(s,x_s) &= max_{u(t)}[\int_s^{s+\Delta s} f(t,x,u)e^{-\beta t}dt + \int_{s+\Delta s}^{s+h} f(t,x,u)e^{-\beta t}dt] + \delta\int_{s+h}^{\infty} f(t,x,u)e^{-\beta t}dt \\
&+ J(s+\Delta s, x_s+\Delta x_s) - \int_{s+\Delta s}^{s+\Delta s+h} f(t,x,u)e^{-\beta t}dt - \delta\int_{s+\Delta s+h}^{\infty} f(t,x,u)e^{-\beta t}dt] \\
&= max[f(s,x,u)e^{-\beta s}\Delta s + J(s+\Delta s, x_s+\Delta x_s) - (1-\delta)\int_{s+h}^{s+\Delta s+h} f(t,x,u)e^{-\beta t}dt] \\
&= max[f(s,x,u)e^{-\beta s}\Delta s + J(s+\Delta s, x_s+\Delta x_s) \\
&- (1-\delta)f(s+h, x(s+h), u(s+h))e^{-\beta(s+h)}\Delta s + o(\Delta s)]
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\int_s^{s+\Delta s} f(t,x,u)e^{-\beta t}dt &= \underbrace{f(\hat{t}, x(\hat{t}), u(\hat{t}))e^{-\beta\hat{t}}\Delta s}_{Integral\ Median} \\
&= [f(s,x_s,u_s)e^{-\beta s} + f_t(s,x,u)e^{-\beta s}dt - \beta f(s,x,u)e^{-\beta s}dt \\
&+ f_x\dot{x}(s,x,u)e^{-\beta s}dt + f_u\dot{u}(s,x,u)e^{-\beta s}dt]\Delta s + o(\Delta s) \\
&= f(s,x_s,u_s)e^{-\beta s}\Delta s + o(\Delta s) \\
\int_{s+h}^{s+\Delta s+h} f(t,x,u)e^{-\beta t}dt &= f(s+h, x(s+h), u(s+h))e^{-\beta(s+h)}\Delta s + o(\Delta s)
\end{aligned}
$$

对于值函数 $J(s+\Delta s, x_s+\Delta x_s)$，进行线性展开得到

$$
\begin{aligned}
J(s+\Delta s, x_s+\Delta x_s) = J(s,x_s) + J_s(s,x)\Delta s + J_x(s,x)\Delta x_s + o(\Delta s) \\
\Delta x_s = \dot{x}_s\Delta s = g(s,x,u)\Delta s
\end{aligned}
$$

代入值函数方程，两侧消除值函数 $J(s,x_s)$ 并同时除以 Δs 得到递归方程：

$$
\begin{aligned}
0 = max_{u(s)}[f(s,x,u)e^{-\beta s} + J_s(s,x) + J_x(s,x)g(s,x,u) \\
- (1-\delta)f(s+h, x(s+h), u(s+h))e^{-\beta(s+h)}]
\end{aligned}
$$

Case: *给定如下动态优化问题;*

$$
\begin{aligned}
max\ \int_0^h u(c)e^{-\beta t}dt + \delta\int_h^{\infty} u(c)e^{-\beta t}dt \\
s.t.\ \dot{k} = f(k) - nk - c, k(0) = k_0
\end{aligned}
$$

其中，假定效用函数满足 $u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}, \sigma \neq 1$，生产函数满足 $f(k) = Ak$，确定 $c(t), k(t)$ 的路径。(*Hint*: 目标函数是 *CRRA* 形式，约束函数是线性形式，可以利用猜解确定值函数)

5.2 不确定性连续时间动态规划

5.2.1 随机问题的 *Hamilton-Jacobi-Bellman*（*HJB*）方程

现在引入随机冲击，考察连续时间的随机动态优化问题：

$$max\ E(\int_0^T f(t,x,u)dt)$$
$$s.t.\ dx=g(x,t,u)dt+\sigma(t,x,u)d\zeta$$

由于包含随机变量，此时不是最大化目标函数而是最大化目标函数的期望值。其中 $\zeta(t)$ 是布朗运动，$E(d\zeta)=0, var(d\zeta)=dt$。根据 *Ito* 微积分的基本规则，有 $(dt)^2=dtd\zeta=0,(d\zeta)^2=dt$。引入随机因素后，重新从值函数导出随机问题下的迭代方程，区别于传统确定性的优化问题，引入随机因素的优化问题需要展开到二阶形式。下面逐步给出随机连续优化问题的求解思路：首先定义值函数

$$J(s,x_s)=max_{u(t),s\le t\le T}E_s\int_s^T f(t,s,u)dt,\ dx=g(x,t,u)dt+\sigma(t,x,u)d\zeta,x(s)=x_s$$

其中 E_s 表示条件于 s 时刻以前所有时刻信息的条件期望，即该动态优化问题的经济含义是个体已经拥有了 s 期以前的所有信息来根据期望最大化进行选择，条件期望满足迭代公式 $E_sE_{s+\Delta s}=E_s$。根据动态规划的基本思想，需要把不同时期的值函数放到一起转化为静态优化问题，定义 $J(s+\Delta s,x_s+\Delta x_s)$:

$$J(s+\Delta s,x_s+\Delta x_s)=max_{u(t),s+\Delta s\le t\le T}E_{s+\Delta s}\int_{s+\Delta s}^T f(t,s,u)dt$$

现在将值函数处理为迭代形式

$$\begin{aligned}J(s,x_s)&=max_{u(t),s\le t\le T}E_s[\int_s^{s+\Delta s}f(t,x,u)dt+\int_{s+\Delta s}^T f(t,x,u)dt]\\&=max_{u(t),s\le t\le T}E_s[\int_s^{s+\Delta s}f(t,x,u)dt+E_{s+\Delta s}\int_{s+\Delta s}^T f(t,x,u)dt]\\&=max_{u(t),s\le t\le T}E_s[\int_s^{s+\Delta s}f(t,x,u)dt+max_{u(t),s+\Delta s\le t\le T}E_{s+\Delta s}\int_{s+\Delta s}^T f(t,x,u)dt]\\&=max_{u(t),s\le t\le T}E_s[\int_s^{s+\Delta s}f(t,x,u)dt+J(s+\Delta s,x_s+\Delta x_s)]\end{aligned}$$

$J(s+\Delta s,x_s+\Delta x_s)$ 在 s 处线性展开

$$\begin{aligned}J(s+\Delta s,x_s+\Delta x_s)&=J(s,x_s)+J_s(s,x_s)\Delta s+J_x(s,x_s)\Delta x_s\\&\quad+\frac{1}{2}J_{ss}(\Delta s)^2+\frac{1}{2}J_{xx}(\Delta x_s)^2+J_{sx}(\Delta s\Delta x_s)+o(\Delta s)\\&=J(s,x_s)+J_s(s,x_s)\Delta s+J_x(s,x_s)\Delta x_s+\frac{1}{2}J_{xx}(s,x_s)\sigma^2(s,x,u)\Delta s+o(\Delta s)\end{aligned}$$

其中根据 *Ito* 微积分基本原则可知

$$\Delta x_s=g(s,x,u)\Delta s+\sigma(s,x,u)\Delta\zeta\to(\Delta x_s)^2=\sigma^2(\Delta\zeta)^2=\sigma^2(s,x,u)\Delta s,\Delta x_s\Delta s=0,(\Delta s)^2=o(\Delta s)$$

进一步化简值函数得到 (将约束条件 $dx=g(x,t,u)dt+\sigma(t,x,u)d\zeta$ 代入)

$$\begin{aligned}J(s,x_s)&=maxE_s[\underbrace{f(s,x(s),u(s))\Delta s}_{Taylor}+J(s,x)+J_s(s,x_s)\Delta s+J_x(s,x_s)\Delta x_s\\&\quad+\frac{1}{2}J_{xx}(s,x_s)\sigma^2(s,x,u)\Delta s+o(\Delta s)]\\&\to 0=maxE_s[f(s,x(s),u(s))\Delta s+J_s(s,x_s)\Delta s+J_x(s,x_s)(g(x,t,u)\Delta s\\&\quad+\sigma(t,x,u)\Delta\zeta)+\frac{1}{2}J_{xx}(s,x_s)\sigma^2(s,x,u)\Delta s+o(\Delta s)]\end{aligned}$$

其中 $E(d\zeta)=0$（取期望后消除），最终得到**迭代方程**

$$0=max_{u(s)}[f(s,x,u)+J_s(s,x)+J_x(s,x)g(s,x,u)+\frac{1}{2}J_{xx}(s,x)\sigma^2(s,x,u)]$$

对于控制变量 u 求导数有

$$0=f_u(s,x,u)+J_x(s,x)g_u(s,x,u)+J_{xx}\sigma(s,x,u)\sigma_u(s,x,u)\to u=u(x)$$

代入递归方程得到 ***HJB(Hamilton-Jacobi-Bellman Equation)*** 方程

$$0=f(s,x,u(x))+J_s(s,x)+J_x(s,x)g(s,x,u(x))+\frac{1}{2}J_{xx}(s,x)\sigma^2(s,x,u(x))$$

利用 *Bellman* 方程求解值函数。二阶偏微分方程（显式解少之又少），通过猜解的形式进行处理。要求：目标函数是 CRRA、CARA 以及 HARA 形式，约束函数是线性函数，此时可以采用猜解的形式处理。值函数与目标函数有相同的形式，或者控制变量是状态变量的线性函数 $u=Ax$。此处的处理与确定性连续优化问题是一致的，事实上能够求解的动态规划形式是非常有限的。

5.2.2 自治问题递归方法

相应的，给出当前值函数定义在的 *HJB* 方程：考虑无穷时期带贴现的自治问题

$$max_{x,u}E\int_o^\infty f(x,u)e^{-\beta t},\ s.t.\ \dot{x}=g(x,u)dt+\sigma(x,u)d\zeta$$

其中 $f(x,u),g(x,u),\sigma(x,u)$ 均有时间无关，对于该自治系统，定义当前值的值函数

$$V(x_s)=maxE_s\int_s^\infty e^{-(t-s)\beta}f(x,u)dt,J(s,x_s)=V(x_s)e^{-\beta s}$$

相应的递归方程给定为

$$\beta V(x)=max_u[f(x,u)+V'(x)g(x,u)+\frac{1}{2}V''(x)\sigma^2(x,u)]$$

5.2.3 随机的连续动态规划应用

给定如下最小化问题

$$min\ E\int_0^\infty(ax^2+bu^2)e^{-rt}dt$$
$$s.t.\ dx=udt+\sigma xd\zeta,x(0)=c$$

定义值函数

$$J(s,x_s)=min_{u(t),s\le t\le\infty}E_s\int_s^\infty(ax^2+bu^2)e^{-rt}dt,\ dx=udt+\sigma xd\zeta,\ x(0)=c$$

得到递归公式

$$0=min_{u(t)}[(ax^2+bu^2)e^{-rt}+J_s+J_xu+\frac{1}{2}J_{xx}\sigma^2x^2]$$

一阶条件得到

$$2bue^{-rs}+J_x(s,x)=0\to u=-\frac{J_x(s,x)}{2b}e^{rs}$$

带回递归方程得到 *HJB* 方程

$$0=ax^2e^{-rs}+J_s(s,x)-\frac{J_x^2(s,x)}{4b}e^{rs}+\frac{1}{2}J_{xx}(s,x)\sigma^2x^2$$

假定值函数与目标函数形式一致[28]，即

$$J(s,x) = Ax^2 e^{-rs}$$

其中 A 为待定系数。回带 HJB 方程得到系数 A 的取值

$$0 = A^2/b + (r-\sigma^2)A - \sigma \to A$$

据此得到

$$u = -\frac{Ax}{b}$$

给定约束条件得到

$$dx = -\frac{Ax}{b}dt + \sigma x d\zeta, x(0) = x_0 \to x(t) = x_0 e^{(-A/b - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma\zeta}$$

在这里应用了 Ito 积分，即

$$dx = Axdt + Bxd\zeta, x(0) = x_0 \to x(t) = x_0 exp((A - \frac{B^2}{2})t + B\zeta)$$

5.2.4 随机增长模型

以 $Ramsey\ Model$ 为例，引入外生冲击，重新定义为

$$\begin{aligned} &max\ E(\int_0^\infty u(c)e^{-\beta t}dt) \\ &s.t.\ dk = (f(k) - c)dt + h(k)d\zeta, k(0) = k_0 \end{aligned}$$

其中假定产出包含随机因素并得到人均化形式

$$\begin{aligned} &dY(t) = F(K,L)dt + H(K,L)d\zeta \to dy(t) = f(k)dt + h(k)d\zeta \\ &dK(t) = dY(t) - dC(t) \to dk = (f(k) - c)dt + h(k)d\zeta \end{aligned}$$

下面讨论一种最简单的随机增长模型，效用函数给定为 $u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$，生产函数给定为 $f(k) = Ak$，冲击函数给定为 $h(k) = \sigma k$，此时目标函数为 $CRRA$ 形式，约束函数满足线性形式，可以使用猜解的方法求解值函数。下面给出详细的求解过程：首先定义值函数

$$J(s,k_s) = max_{c(t)}E(\int_s^\infty u(c)e^{-\beta t}dt), dk = (f(k) - c)dt + h(k)d\zeta, k(s) = k_s$$

得到递归方程

$$0 = max_{c(t)}[u(c)e^{-\beta s} + J_s(s,k) + J_x(s,k)(f(k) - c) + \frac{1}{2}J_{xx}h^2(k)]$$

对于控制变量 c 求偏导得到

$$u'(c)e^{\beta s} = J_k(s,k)$$

假定值函数与目标函数具有相同的形式

$$J(s,k) = B\frac{k^{1-\gamma}}{1-\gamma}e^{-\beta s}, J_s = -\beta B\frac{k^{1-\gamma}}{1-\gamma}e^{-\beta s}, J_k = Bk^{-\gamma}e^{-\beta s}$$

[28]注意到，在这里目标函数的形式是初贴现因子以外的函数形式，不需要讲贴现因子考虑在内。

其中 B 为待定系数，代入一阶条件得到

$$c = B^{-\frac{1}{\gamma}} k$$

代入迭代方程可以得到

$$B = (\frac{\beta + \frac{\gamma}{2(1-\gamma)}\sigma}{\gamma})^{-\sigma}$$

根据约束条件，利用 *Ito* 公式可以得到

$$dk = (Ak - B^{-\frac{1}{\gamma}} k)dt + \sigma k d\zeta, k(0) = k_0 \to k(t) = k_0 e^{(A - B^{-\frac{1}{\gamma}} - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma\zeta}$$

在随机增长模型中有两点值得注意：一是随机变量的引入有助于更细致的刻画经济中发生的随机冲击，从而将短期波动纳入长期增长的分析框架；二是对于增长的解释，给出随机增长模型中增长率的表达式

$$\frac{dk}{k} = (A - B^{-\frac{1}{\gamma}})dt + \sigma d\zeta$$
$$\phi = E(\frac{dk}{k}) = (A - B^{-\frac{1}{\gamma}})dt$$

将 ϕ 定义为平均增长率，可知平均增长率取决于参数 A, σ, γ, β，尤其是参数 σ 刻画了经济波动对于增长的影响。在该 *Ramsey Model* 中，波动 σ 对于增长率的影响是不确定的，这是因为受到 $(1-\gamma)$（风险厌恶参数）正负的影响。

Case：*分别讨论以下三种形式下的 $(c(t), k(t))$ 显式解路径：*

1. *效用函数给定为 $u(c) = \frac{c^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}$，生产函数给定为 $f(k) = Ak$，冲击函数给定为 $h(k) = \sigma k$；*
2. *效用函数给定为 $u(c) = -\frac{1}{\phi} e^{-\phi c}$，生产函数给定为 $f(k) = Ak$，冲击函数给定为 $h(k) = \sigma k$；*
3. *效用函数给定为 $u(c) = \frac{c^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}$，生产函数给定为 $f(k) = Ak^{\alpha}$，冲击函数给定为 $h(k) = \sigma k$；当且仅当 $\alpha = \gamma$ 的时候存在显式解*

5.2.5 随机的自治系统动态规划

此前对于随机动态优化问题全部建立在贴现的值函数形式上，现在给出更为一般的（或者在文献中更为经常使用的）当前值值函数的动态规划。注意到，当前值函数的动态规划方法是针对自治系统而言，对于非自治系统，即 $f(t, x, u), g(t, x, u)$ 的形式较难给出具体形式，因而将问题聚焦于自治系统。

给定不确定性下的自治系统，即目标函数和约束函数均与时间无关，该种情况下可以确定动态规划的最优形式，最优化问题表示为

$$max_u \int_0^T f(x, u) e^{-rt} dt$$
$$s.t.\ dx = g(x, u)dt + \sigma(x, u)d\zeta$$

自治系统下可以定义当前值的值函数形式

$$V(x_s) = max\ E_s \int_s^T f(x, u) e^{-r(t-s)} dt$$

在这里，关键的处理就是在贴现因子上增加了 s 从而经济含义表示为贴现到当前而不是最初期的贴限值。给定上述值函数形式，贴现后的值函数 $J(s, x_s)$ 和当前值值函数存在下列关系

$$J(s, x_s) = max\ E_s \int_s^T f(x, u) e^{-rt} dt = e^{-rs} V(x_s)$$

递归方程（RE）可以相应的转化为

$$rV(x) = max_u[f(x,u) + V'(x)g(x,u) + \frac{1}{2}V''(x)\sigma^2(x,u)]$$

上述方程是值函数 $J(s,x_s)$ 的微分方程而非 $J(s,x_s)$ 的偏微分方程，此时可以通过猜解的形式确定显式解或者数值算法确定解析解。一般而言，这种建立在自治系统当前值基础上的递归方程使用更为广泛。求解一阶条件可以确定控制变量的取值 $u = u(x)$，代入递归方程得到 HJB 方程：

$$rV(x) = f(x,u(x)) + V'(x)g(x,u(x)) + \frac{1}{2}V''(x)\sigma^2(x,u(x))$$

5.2.6 *Merton(1971JET)*：消费者投资组合问题

在随机情况 *Ramsey Model* 下考察消费者投资组合决策与消费决策。在此基础上，后续研究对于投资组合与资产定价进行了深入研究[29]。下面来对 *Merton* 模型展开讨论。

假定消费者资产 W_t 可以用于持有股票份额 w_t 和债券 $(1-w_t)$，获得股票收益 dR_s 和债券收益 dR_b；定义 $dR_s = adt + \sigma d\zeta$，股票价格服从几何布朗运动 $dR_s = \frac{dP}{P} = adt + \sigma d\zeta$，股票收益均值为 a；假定债券收益是确定的,$dR_b = rt$，债券价格相应的是确定的 $dR_b = \frac{dP_b}{P_b} = rdt$。经济意义在于债券作为无风险资产，股票作为风险资产，两者之间的价差是风险溢价，投资组合的基本问题就是消费者如何将资产在股票和债券上进行配置从而最优化消费。消费者投资收益表示为

$$dW_t = w_t W_t dR_s + (1-w_t)W_t dR_b - C_t dt$$

消费者预算约束表示为股票和债券市场收益用于消费和储蓄，收益减消费等于储蓄并用于增加居民资产，因而居民资产积累动态如上给定。注意到，*Merton* 模型中并未引入劳动收入[30]。

消费者问题给定为

$$\begin{aligned} max_{c_t,w_t} \int_0^{\infty} u(c_t)e^{-\beta t}dt \\ s.t.\ dW_t = w_t W_t dR_s + (1-w_t)W_t dR_b - c_t dt, W_0 \end{aligned}$$

最优化决定消费 c_t 与资产投资组合参数 w_t。根据投资收益的随机方程，进一步转化为

$$s.t.\ dW_t = [aw_t W_t + r(1-w_t)W_t - c_t]dt + \sigma w_t W_t d\zeta$$

定义当前值的值函数，其中状态变量为 W_t，控制变量是 c_t, w_t：

$$\begin{aligned} V(W) = max_{c_t,w_t}\ E_s \int_s^{\infty} u(c_t)e^{-\beta(t-s)}dt \\ s.t.\ dW_t = [aw_t W_t + r(1-w_t)W_t - c_t]dt + \sigma w_t W_t d\zeta, W_0 \end{aligned}$$

递归方程给定为

$$\beta V(W_s) = max_{c_t,w_t}[u(c_s) + V'(W)(aw_s W_s + r(1-w_s)W_s - c_s) + \frac{1}{2}V''(W)\sigma^2 w^2 W^2]$$

求解控制变量的一阶条件得到：

$$\begin{aligned} c_t &: u'(c_s) = V'(W_s) \rightarrow \hat{c} = c(W_s) \\ w_t &: V'(W)(a-r)W_s + V''(W)w_s W_s^2 \sigma^2 = 0 \rightarrow \hat{w} = w(W_s) \end{aligned}$$

[29] *Lucas(1978ECMA)* 考察了一般均衡基础上的资产定价模型（*Lucas Tree*）。*Eaton(1987RES)* 进一步考察了随机增长模型。

[30] 难以求解显式解进行分析

将其带入递归方程得到 *Bellman* 方程

$$\beta V(W)=u(\hat{c}_s)+V'(W)((a-r)\hat{w}W+rW-\hat{c}_s)+\frac{1}{2}V''(W)\sigma^2\hat{w}^2W^2$$

假定效用函数为 $u(c)=\frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma},\gamma\neq 1,u(c)=lnc,\gamma=1$；假定值函数和目标函数具有相同的形式：

$$V(W)=\frac{BW^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

其中 B 是待定系数。根据一阶条件可以得到

$$u'(c)=V'(W)\rightarrow c_s=B^{-\frac{1}{\gamma}}W_s$$
$$w=-\frac{(a-r)V'(W)}{V''(W)W\sigma^2}\rightarrow w_s=\frac{a-r}{\gamma\sigma^2}$$

其中 w 等于常数。回带递归方程得到 *Bellman* 方程

$$\beta\frac{BW^{1-\gamma}}{1-\gamma}=\frac{(B^{-\frac{1}{\gamma}}W_s)^{1-\gamma}}{1-\gamma}+BW^{-\gamma}[(a-r)\frac{a-r}{\gamma\sigma^2}W+rW-B^{-\frac{1}{\gamma}}W]+\frac{1}{2}B\frac{(a-r)^2}{\gamma\sigma^2}W^{1-\gamma}$$

根据 *Bellman* 方程可以唯一决定参数 B，因而可以确定值函数形式以及消费决策 c_t、投资组合决策 w_t，并根据预算约束微分方程可以得到资产积累路径（几何布朗运动）

$$W(t)=W_0e^{[aw+r(1-w)-B^{-\frac{1}{\gamma}}-\frac{1}{2}\sigma^2w^2]dt+\sigma wd\zeta}$$

在该模型中可以得到以下结论（*Two Puzzle*）：首先，$\frac{c}{W}=B^{-\frac{1}{\gamma}}$，即消费是收入一个恒常数，这就引出了消费平滑性的 *Puzzle*，即理论上消费的波动应该与收入波动一致，但是实际上消费波动远小于收入波动。其次，投资组合 $w=\frac{a-r}{\gamma\sigma^2}$ 等于常数，$a-r$ 表示风险资产与无风险资产间的风险溢价，γ 表示风险厌恶系数，σ 表示不确定性波动，投资组合取决于一系列的相关参数，因而在不确定性情况下模型认为投资组合是固定的，这与现实不符。注意到，在这里给出了资产定价的公式（*CAPM*）：

$$a=r+\sigma^2\gamma w$$

这表明风险资产收益等价于无风险资产收益外加风险溢价，风险溢价取决于经济波动、风险厌恶系数以及市场风险资产的投资组合。*Prescott(1985 JME)*[31]实证检验了模型估计参数与实际市场数据，结果表明模型预测远小于实际的风险溢价，该文提出了风险溢价问题（*risk-premium puzzle*）。最重要的是，解决上述两个 *Puzzle* 需要重新处理效用函数或消费函数的形式。尤其是，*CRRA* 效用函数的形式中 γ 表示了相对风险厌恶系数，$\frac{1}{\gamma}$ 表示了跨期消费替代弹性，两个重要参数使用同一个 γ 表达，存在问题。

5.2.7 *Merton* 模型的延伸

为了解决上述问题，将资本存量引入效用函数（*Bakshi & Chen*，*1996AER*[32]）。资本存量进入效用函数：$u=u(c,k)$，经济含义解释：一是社会地位，财富象征其社会地位从而可以进入效用函数；二是资本主义精神即资本家投资生产获取剩余价值，从而财富可以进入效用函数。给定如下形式的效用函数：

$$u(c,W)=\frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}W^{-\lambda}$$

其中，效用函数满足 $u_W>0,u_{WW}<0$,$u(c,W)$ 是凹函数。假定值函数与目标函数具有相同的形式

$$V(W)=B\frac{W^{1-\lambda-\gamma}}{1-\gamma-\lambda}$$

[31]Rajnish Mehra, Edward C. Prescott,1985: The equity premium: A puzzle, *Journal of Monetary Economics*; Rajnish Mehra, Edward C. Prescott,1988: The equity risk premium: A solution?*Journal of Monetary Economics*

[32]Bakshi, Gurdip S & Chen, Zhiwu, 1996. "The Spirit of Capitalism and Stock-Market Prices," *American Economic Review*, American Economic Association, vol. 86(1), pages 133-157, March.

据此可以根据猜解的方法确定引入资本之后的 *Merton* 模型。

除了将资本引入效用函数之外，还可以考虑 *Quasi-Hyperbolic* 形式的问题：

$$
\begin{aligned}
max\ E(\int_0^h u(c)e^{-\beta t}dt + \delta \int_h^\infty u(c)e^{-\beta t}dt) \\
s.t.\ dW = [awW + r(1-w)W - c]dt + \sigma wW d\zeta, W_0
\end{aligned}
$$

5.3 确定性离散时间动态规划

连续时间向离散时间的推广是为了更方便的求解数值解。一般而言，从连续时间向离散时间的推广是完全“平凡”的，基本步骤如下：

1. 定义值函数：对于自治系统一般定义为当前值的值函数；
2. 得到递归方程，求解递归方程关于控制变量的一阶条件；
3. 值函数处理：一是采用 *Lagrange* 方法和包络引理处理最优值问题得到动力系统，此时给出的是 *policy function*；二是利用离散 *Bellman* 方程处理离散时间问题得到动力系统，此时给出的值函数；

一般化的给出离散形式的动态优化问题：

$$
\begin{aligned}
max(min)\ \sum r(x_t, u_t, t) \\
s.t.\ x_{t+1} = g(x_t, w_t, t), x_0
\end{aligned}
$$

一般将问题简化为

$$
\begin{aligned}
max(min)\ \sum \beta^t r(x_t, u_t) \\
s.t.\ x_{t+1} = g(x_t, u_t), x_0
\end{aligned}
$$

其中 $r(x_t, u_t), g(x_t, u_t)$ 不显式的含有时间，从而问题处理为经典的自治问题。

定义离散情况下的值函数：控制变量是 u_t，状态变量是 x_t

$$V(x_s) = max_{u_t} \sum \beta^{t-s} r(x_t, u_t)\ s.t.\ x_{t+1} = g(x_t, u_t), x(t_s) = x_s$$

可以证明 $V(x_s)$ 与时间不显式相关。进一步的可以给出

$$V(x_{s+1}) = max_{u_t} \sum \beta^{t-(s+1)} r(x_t, u_t)$$

迭代方程（RE）表示为

$$
\begin{aligned}
V(x_s) &= max_{u_t}[r(x_s, u_s) + \beta r(x_{s+1}, u_{s+1}) + \beta^2 r(x_{s+2}, u_{s+2}) + \dots] \\
&= max_{u_t}[r(x_s, u_s) + \beta \sum \beta^{t-(s+1)} r(x_t, u_t)] \\
&= max_{u_t}[r(x_s, u_s) + \beta V(x_{s+1})]
\end{aligned}
$$

Bellman 方程可以给定为

$$V(x_s) = max_{u_s, x_{s+1}}[r(x_s, u_s) + \beta V(x_{s+1})]$$

其中 $x_{s+1} = g(x_s, u_s), x_s$ 给定。

5.3.1 *Lagrange* 方法与包络引理

定义 *Lagrange* 函数:

$$\mathcal{L} = r(x_s, u_s) + \beta V(x_{s+1}) + \lambda(g(x_s, u_s) - x_{s+1})$$

其中 λ 是 *Lagrange* 乘子，是 x_{s+1} 的边际值。一阶条件表示为

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial u_t} &= \frac{\partial r}{\partial u_s} + \lambda_s \frac{\partial g}{\partial u_s} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_{s+1}} &= \beta V'(x_{s+1}) - \lambda_s = 0 \\ x_{s+1} &= g(x_s, u_s)\end{aligned}$$

注意到分别对 u_s 和 x_{s+1} 求导，这是因为 x_s 已经给定不需要进行优化。上述三个方程决定了 x_t, u_t, λ_t 的动态变化，根据包络引理得到

$$V'(x_s) = \frac{\partial L}{\partial x_s}|_{x^*, u^*} = \frac{\partial r}{\partial x_s} + \lambda_s \frac{\partial L}{\partial x_s}$$

包络引理给出了 $V'(x_s)$ 的决定，据此可以进一步给出 $V'(x_{s+1})$ 的形式，并将其代入最优性条件，得到:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial r}{\partial u_s} + \lambda_s \frac{\partial g}{\partial u_s} = 0 \\ &\beta[\frac{\partial r(x_{s+1}, u_{s+1})}{\partial x_{s+1}} + \lambda_{s+1} \frac{\partial g(x_{s+1}, u_{s+1})}{\partial x_{s+1}}] = \lambda_s \\ &x_{s+1} = g(x_s, u_s)\end{aligned}$$

上述方程组是三个关于 u_s, x_s, λ_s 的微分方程，也称为欧拉方程。

值得注意，*Lagrange* 和包络引理方法存在众多的问题，包括值函数的存在性、函数性质、如何求解等等均未给出明确的解释，是一种粗糙的求解方法，因此需要利用离散时间动态规划方法给出更为严谨的证明。

5.3.2 *Case*：离散时间 *Ramsey Model* 求解

给定离散时间的 *Ramsey Model*:

$$\begin{aligned}&max \ \sum \beta^t u(c_t) \\ &\quad s.t. \ k_{t+1} - k_t = f(k_t) - c_t\end{aligned}$$

假定人口增长为 *0*[33]。定义当前值的值函数

$$V(k_s) = max \ \sum \beta^{t-s} u(c_t)$$

递归方程给定为

$$\begin{aligned}V(k_s) &= max_{c_s, k_s}[u(c_s) + \beta V(k_{s+1})] \\ k_{s+1} &= f(k_s) + k_s - c_s, k(t_s) = k_s\end{aligned}$$

利用 *Lagrange* 和包络定理方法求解该问题，定义 *Lagrange* 函数

$$L = u(c_s) + \beta V(k_{s+1}) + \lambda_s[f(k_s) + k_s - c_s - k_{s+1}]$$

[33]思考：人口增长不为 0 时的 *Ramsey Model*

一阶条件给定为

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial c_s} &= u'(c_s) - \lambda_s = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial k_{s+1}} &= \beta V'(k_{s+1}) - \lambda_s = 0 \\
k_{s+1} &= f(k_s) + k_s - c_s
\end{aligned}
$$

根据包络引理给出

$$
V'(k_s) = \frac{\partial L}{\partial k_s} = \lambda_s(1 + f'(k_s))
$$

将其代入一阶条件可以得到欧拉方程：

$$
\begin{aligned}
&u'(c_s) = \lambda_s \\
&\beta\lambda_{s+1}(1 + f'(k_{s+1})) = \lambda_s \\
&k_{s+1} = f(k_s) + k_s - c_s
\end{aligned}
$$

上述三个方程可以确定 (c_s, k_s, λ_s)，进一步简化得到

$$
\begin{aligned}
&\beta u'(c_{s+1})(1 + f'(k_{s+1})) = u'(c_s) \\
&k_{s+1} = f(k_s) + k_s - c_s
\end{aligned}
$$

因此离散 *Ramsey Model* 最优解可以由上述动力系统给定[34]。

5.4 不确定性离散时间动态规划

5.4.1 离散时间随机动态优化问题

给定不确定性下动态规划基本问题为

$$
\begin{aligned}
max_{u(t),x(t)}\ E_0 \sum \beta^t r(x_t, u_t) \\
s.t.\ x_{t+1} = g(x_t, u_t, \varepsilon_t)
\end{aligned}
$$

其中 ε_t 服从随机过程，可以假定 $\varepsilon_{t+1} = \varepsilon_t^{\theta} u_t$ 进而转化为对数 *AR1* 过程 $log\varepsilon_{t+1} = \theta log\varepsilon_t + logu_t$；或者可以假定为 $\frac{\varepsilon_{t+1}}{\bar{\varepsilon}} = (\frac{\varepsilon_t}{\bar{\varepsilon}})^{\theta} u_t$，表示去均值的 *AR1* 过程。如果遇到 $x_{t+1} = g(x_t, u_t, \varepsilon_{t+1})$（初始时刻就存在不确定性）相应的需要转化为 $x_{t+1} = g(x_t, u_t, \varepsilon_t)$。状态变量为 x_t，控制变量为 u_t。

对于上述随机动态优化问题，下面通过值函数导出迭代方程。定义当前值的值函数：

$$
V(x_s, \varepsilon_s) = max \sum E_s \beta^{t-s} r(x_s, u_s),\ s.t.\ x_{t+1} = g(x_t, u_t, \varepsilon_t)
$$

ε_s 实际上在 t 时刻是确定性的冲击，此处用来表示不确定性下的当前值值函数。相应的

$$
\begin{aligned}
V(x_s, \varepsilon_s) &= max\ E_s(r(x_s, u_s) + \beta r(x_{s+1}, u_{s+1}) + \beta^2 r(r_{s+2}, u_{s+2})) + \dots \\
&= max\ E_s[r(x_s, u_s) + \beta \sum_{s+1} \beta^{t-(s+1)} r(x_t, u_t)] \\
&= max\ E_s[r(x_s, u_s) + \beta E_{s+1} \sum_{s+1} \beta^{t-(s+1)} r(x_t, u_t)] \\
&= max\ E_s[r(x_s, u_s) + \beta V(x_{s+1}, \varepsilon_{s+1})]
\end{aligned}
$$

[34]思考：给定 CRRA 效用函数 $u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ 和线性生产函数 $f(k) = Ak$，通过 *Bellman* 方程能否猜解值函数形式？可以通过猜解的方式给出，但是猜解能够求解的显式解形式非常有限。

相应的递归方程（RE）给定为：

$$
\begin{aligned}
V_{x_s,\varepsilon_s} &= max_{u_s,x_{s+1}}[r(x_s,u_s)+\beta E_s V(x_{s+1},\varepsilon_{s+1})]\\
s.t.\ x_{s+1} &= g(x_s,u_s,\varepsilon_s)
\end{aligned}
$$

定义 $Lagrange$ 方程：

$$
L = r(x_s,u_s)+\beta E_s V(x_{s+1},\varepsilon_{s+1})+\lambda_s(g(x_s,u_s,\varepsilon_s)-x_{s+1})
$$

其中 λ_s 是 $Lagrange$ 乘子。一阶条件联合约束条件可以得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial u_s} &= 0 \to \frac{\partial r(x_s,u_s)}{\partial u_s}+\lambda_s\frac{\partial g(x_s,u_s,\varepsilon_s)}{\partial u_s}=0\\
\frac{\partial L}{\partial x_{s+1}} &= 0 \to \beta V_x(x_{s+1},\varepsilon_{s+1})-\lambda_s=0\\
x_{s+1} &= g(x_s,u_s,\varepsilon_s)
\end{aligned}
$$

上述三个方程可以确定 $(\hat{x}_s,\hat{u}_s,\hat{x}_{s+1})$。在联合约束条件中，值函数的形式并不确定，接下来通过两种方式确定值函数。

1. $Bellman$ 方程：假定上三个方程确定 $\hat{u}_s,\hat{x}_s$，将其代入递归方程得到 $Bellman$ 方程

$$
\begin{aligned}
V_{\hat{x}_s,\varepsilon_s} &= r(\hat{x}_s,\hat{u}_s)+\beta E_s V(x_{s+1},\varepsilon_{s+1})\\
s.t.\ x_{s+1} &= g(x_s,u_s,\varepsilon_s)
\end{aligned}
$$

对于上述 $Bellman$ 方程，存在显式解的情况下可以利用猜解的方法进行求解，如果不存在显式解则需要通过数值算法进行求解。

2. 包络引理：一般而言离散的随机动态优化问题可以利用包络引理（不严谨）的给出值函数的差分系统用于数值求解，根据包络引理可以得到

$$
V_x(x_s,\varepsilon_s)=\frac{\partial L}{\partial x_s}=\frac{\partial r(x_s,u_s)}{\partial x_s}+\lambda_s\frac{\partial g(x_s,u_s)}{\partial x_s}
$$

相应的可以转化为

$$
V_x(x_{s+1},\varepsilon_{s+1})=\frac{\partial L}{\partial x_{s+1}}=\frac{\partial r(x_{s+1},u_{s+1})}{\partial x_{s+1}}+\lambda_{s+1}\frac{\partial g(x_{s+1},u_{s+1})}{\partial x_{s+1}}
$$

因此差分方程系统给定为

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial u_s} &= 0 \to \frac{\partial r(x_s,u_s)}{\partial u_s}+\lambda_s\frac{\partial g(x_s,u_s,\varepsilon_s)}{\partial u_s}=0\\
\frac{\partial L}{\partial x_{s+1}} &= 0 \to \beta E_s[\frac{\partial L}{\partial x_{s+1}}=\frac{\partial r(x_{s+1},u_{s+1})}{\partial x_{s+1}}+\lambda_{s+1}\frac{\partial g(x_{s+1},u_{s+1})}{\partial x_{s+1}}]=\lambda_s\\
x_{s+1} &= g(x_s,u_s,\varepsilon_s)\\
\varepsilon_{s=1} &= \varepsilon_s^{\theta}u_s
\end{aligned}
$$

上述差分系统给出了数值求解的思路，但是问题中在于包络引理尽管可以用于计算，但是并不严谨，这是因为并不清楚值函数的存在性以及可微性等，直接进行计算，未给出严格意义上的证明。本节的最后给出严格的基于动态优化方法的值函数存在性与性质证明。

5.4.2 *Case*：离散时间随机 *Ramsey Model*

在传统的 $Ramsey\ Model$ 中，引入外生的随机冲击。假定生产过程存在不确定性冲击 $f(k_t,\varepsilon_t)$，其中 ε_t 服从随机过程 $\varepsilon_{t+1}=\varepsilon_t^{\theta}e^{u_t}$。标准化的 $Ramsey\ Model$ 给定为 ***[SP 序列问题]***

$$
\begin{aligned}
max_{c_t,k_t}\ &\sum \beta^t u(c_t)\\
s.t.\ k_{t+1} &= k_t+f(k_t,\varepsilon_t)-c_t, k_0
\end{aligned}
$$

求解上述问题确定最优路径 $\{c_t\}_0^\infty, \{k_t\}_1^\infty$。对于该自治系统，定义当前值的值函数得到

$$V(k_s, \varepsilon_s) = maxE_s \sum \beta^{t-s} u(c_s),\ k_{s+1} = k_s + f(k_s, \varepsilon_s) - c_s,\ k_s$$

相应的递归方程（RE）表示为

$$\begin{aligned} &V(k_s, \varepsilon_s) = max_{c_s, k_{s+1}}[u(c_s) + \beta E_s V(k_{s+1}, \varepsilon_{s+1})] \\ &s.t.\ k_{s+1} = k_s + f(k_s, \varepsilon_s) - c_s,\ k_s \end{aligned}$$

定义 *Lagrange* 函数

$$L = u(c_s) + \beta E_s V(k_{s+1}, \varepsilon_{s+1}) + \lambda_s[k_s + f(k_s, \varepsilon_s) - c_s - k_{s+1}]$$

其中 λ_s 是 *Lagrange* 乘子，是状态变量 k_{s+1} 的边际值。给出最优性条件：

$$\begin{aligned} [c_s] &: u'(c_s) = \lambda_s \\ [k_{s+1}] &: \beta E_s V_k(k_{s+1}, \varepsilon_{s+1}) = \lambda_s \\ [\lambda_s] &: k_{s+1} = k_s + f(k_s, \varepsilon_s) - c_s \end{aligned}$$

根据包络引理可知

$$\begin{aligned} V_k(k_s, \varepsilon_s) &= \frac{\partial L}{\partial k_s} = \lambda_s[1 + f_k(k_s, \varepsilon_s)] \\ V_k(k_{s+1}, \varepsilon_{s+1}) &= \lambda_{s+1}[1 + f_k(k_{s+1}, \varepsilon_{s+1})] \end{aligned}$$

重新代入最优性条件得到

$$\begin{aligned} [c_s] &: u'(c_s) = \lambda_s \\ [k_{s+1}] &: \beta E_s \lambda_{s+1}[1 + f_k(k_{s+1}, \varepsilon_{s+1})] = \lambda_s \\ [\lambda_s] &: k_{s+1} = k_s + f(k_s, \varepsilon_s) - c_s \end{aligned}$$

根据上述三个方程可知

$$\begin{aligned} &\beta E_s[u'(c_{s+1})(1 + f_k(k_{s+1}, \varepsilon_{s+1}))] = u'(c_s) \\ &k_{s+1} = k_s + f(k_s, \varepsilon_s) - c_s \end{aligned}$$

上述最优化条件与离散时间 *Ramsey Model* 中的最优性条件是一致的。对于该差分动力系统，一般而言无法求解显式解，利用对数线性化将其转化为线性化方程处理。

5.5 *SP* 问题与 *RE* 问题的等价性

现在考虑如下问题：不加证明的利用 *RE* 求解 SP 问题，那么 *RE* 得到的结果是 *SP* 问题的解吗？需要满足哪些条件？值函数的存在性如何？不确定性离散时间动态规划的问题关键在于确定 *SP* 序列问题与 *RE* 迭代方程，其中 *SP* 表示动态的优化路径，*RE* 则表示静态优化问题，两者是否是等价的？下面给出严谨的证明。

给定标准化的 *SP* 问题[35]：

$$\begin{aligned} sup_{\{x_t\}} \sum_t \beta^t F(x_t, x_{t+1}) \\ s.t. x_{t+1} \in \Gamma(x_t),\ x_0 \end{aligned}$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 表示对应关系 $x \to 2^X$（x 的幂集合），表示 x_t 对应的某个集合；对应关系是对函数关系的拓展，将点对点转化为点对集合关系。

[35]参考 *Stokey and Lucas* 教材

5.5.1 对应关系连续性

首先定义对应关系 $\Gamma(\cdot)$ 在 x_0 处的连续性：

1. 定义 $\Gamma(\cdot)$ 的下半连续性：如果 $\Gamma(x_0) \neq \phi$（非空集），且对任意开集合 G，$\Gamma(x_0) \cap G \neq \phi$，则对于任意邻域内 $x \in U_\delta(x_0)$，$\Gamma(x) \cap G \neq \phi$；
2. 定义 $\Gamma(\cdot)$ 的上半连续性：如果 $\Gamma(x_0) \neq \phi$，且存在开集合 G，$\Gamma(x_0) \subset G$，则对于任意 $x \in U_\delta(x_0)$，$\Gamma(x) \subset G$；
3. 如果 $\Gamma(\cdot)$ 在 x_0 处既是上半连续又是下半连续的，则 $\Gamma(\cdot)$ 在 x_0 处是连续的；具体情况下，连续函数的交界处需要判别上半和下半连续性，在连续处对应关系必然是连续的[36]；

Case：给出 *Ramsey Model* 的对应 $\Gamma(\cdot)$ 形式：

$$max_{c_t,k_t} \sum \beta^t u(c_t)$$
$$s.t.\ k_{t+1} = k_t + f(k_t) - c_t, k_0$$

相应的可以转化为关于 k_t 的函数关系：

$$max_{k_t} \sum \beta^t u(k_t + f(k_t) - k_{t+1})$$
$$s.t. k_{t+1} \in \Gamma(k_t)$$

其中对应 $\Gamma(k_t) = \{0 \leq k_{t+1} \leq k_t + f(k_t)\}$ 在 $(0, \infty)$ 上是连续的。

5.5.2 SP 与 FE 的等价性定理

定义该一般问题的值函数

$$V(x_s) = sup \sum_{t=s} \beta^{t-s} F(x_s, x_{s+1})$$
$$s.t.\ x_{s+1} \in \Gamma(x_s)$$

递归方程（*RE*）给定为

$$V(x_s) = sup\{F(x_s, x_{s+1}) + \beta V(x_{s+1})\},\ x_{s+1} \in \Gamma(x_s)$$

或者定义为泛函方程 *FE*（*function equation*）：

$$V(x) = sup[F(x, y) + \beta V(y)],\ y \in \Gamma(x)$$

***SP* 与 *FE* 的等价性定理**：如果满足如下假设：*A1*：任意 $x \in X$，$\Gamma(x) \neq \phi$(非空)；*A2*：$\lim_{t\to\infty} \sum \beta^t F(x_t, x_{t+1})$ 极限存在（收敛）；则有如下四个定理

1. ***Theorem 1***：如果 $V(x)$ 是 *SP* 的值函数，则 $V(x)$ 满足 *FE*；
2. ***Theorem 2***：如果 $V(x)$ 满足 *FE* 且 *TVC* 成立[37]$\lim \beta^t V^t(x) = 0$，则 $V(x)$ 满足 *SP*；
3. ***Theorem 3***：如果序列 $\{x_t\}_0^\infty$ 如果是 *SP* 的解，则 x_t 必然满足 *FE*，也即 $V(x_s) = sup\{F(x_s, x_{s+1}) + \beta V(x_{s+1})\}$，$x_{s+1} \in \Gamma(x_s)$；

[36]对于分段分界函数，在分段点 x_0 处，一般而言从大变小 $\Gamma(\cdot)$ 是下半连续，从小变大 $\Gamma(\cdot)$ 是上半连续。

[37]从有限到无限必须满足 TVC，因此实际上泛函方程的解满足无穷期动态优化 SP 问题必须满足横截性条件。

4. ***Theorem 4***：如果 FE 的解表示为 $y = G(x)$（*policy function*），即 $\{x_t\}_0^\infty$ 可以由以下关系生成：$x_{t+1} = G(x_t)$，同时满足 TVC，则 $\{x_t\}_0^\infty$ 是 SP 的解；

定理 1 和定理 2 表明两种问题的值函数是相互对应的；定理 3 和定理 4 表明两种问题的解是一致的；注意到，SP 问题的解是动态路径序列 $\{x_t\}_0^\infty$，而 FE 的解是最优响应方程 $y = G(x)$，基于响应方程确定动态路径序列，通过两种形式得到的路径 $\{x_t\}_0^\infty$ 是一致的。因此，上述定理表明求解序列问题 SP 可以通过求解泛函方程 FE 得到，也就可以使用 FE 或者 RE 求解 SP 问题。下面通过 FE 给出值函数的存在性、性质以及求解方法。

5.5.3 值函数存在性定理

首先给出度量空间的相关内容用于后续分析。定义压缩算子 $T : s \to S$，若对于任意 $x, y \in S$，则有

$$\rho(Tx, Ty) \leq \beta\rho(x, y), 0 < \beta < 1$$

可以看到压缩算子的作用就是在原来的基础上进行（线性）压缩。

定义算子的不动点：存在 $x \in S$，$Tv = v$。

收敛性定理：如果 (s, ρ) 是完备的度量空间，其中 $T : s \to S$ 是模为 β 的压缩算子，则对于任意 $v_0 \in s$，$\rho(T^n v_0, v) \leq \beta^n \rho(v_0, v)$，极限 $\lim_{n\to\infty} T^n v_0 \to v$。收敛性定理表明，如果存在压缩算子 β，那么从任意的 v_0 出发总是可以收敛到稳定的值函数 V。接下来证明值函数的存在性，只需要定义相应的压缩算子即可。

对于一般化的动态优化问题，定义 ***FE* 算子** $T : c(x) \to C(X)$，其中 $C(X)$ 表示 x 上所有连续函数组成的空间，即任意 $f \in C(X)$，$f : X \to \mathcal{R}$ 是连续函数。进一步的，定义度量 $||f(x)|| = sup_{x\in X}|f(x)|$，因此接下来的分析在 $f(x)$ 的度量空间中展开。

给定一般性的 SP 问题，对于任意 $f \in C(X)$，则有

$$(TF)(x) = sup_{y\in\Gamma(x)}\{F(x, y) + \beta f(y)\}$$

利用压缩算子定理证明值函数的存在性。

进一步假设：*A3*：$\beta \in (0, 1)$，目标函数 $F(x, y)$ 有界；*A4*：任意 $x \in X$,$\Gamma(x)$ 非空且紧的（有界且闭的）；

值函数存在性定理 *Theorem 5*：$C(X)$ 表示 x 上所有连续函数组成的空间，如果满足假设 *A3*：和假设 *A4*：，T 是压缩算子，对于任意 $v_0 \in C(X), v_n = T^n v_0$，则 $\lim v_n \to V$。

上述定理说明：存在 $v \in C(X)$，使得 $v(x) = sup_{y\in\Gamma(x)}\{F(x, y) + \beta f(y)\}$，即值函数存在；同时，$v \in C(X)$ 表明值函数 v 是连续函数；更重要的是，从任意的 v_0 出发，构造 $v_n = T^n v_0$ 序列，必然存在 $v_n \to V$，这给出了值函数的求解方法。具体而言：

$$\begin{aligned}
V_1(x) &= Tv_0(x) = sup_{y\in\Gamma(x)}\{F(x, y) + \beta V_0(y)\} \\
V_2(x) &= Tv_1(x) = sup_{y\in\Gamma(x)}\{F(x, y) + \beta V_1(y)\} \\
V_n(x) &= sup_{y\in\Gamma(x)}\{F(x, y) + \beta V_{n-1}(y)\}
\end{aligned}$$

因此任意给定初始值 v_0，利用上述值函数迭代方法可以最终确定值函数 V。

5.5.4 值函数性质定理

为了确定值函数的性质，对目标函数和约束函数施加更多的假定从而导出值函数相关性质。

假设：*A5*：对于任意 y，$F(x, y)$ 关于 y 严格单调递增；*A6*：$\Gamma(\cdot)$ 是严格单调递增的，即对于任意 $x_1, x_2 \in X, x_1 \in x_2$，则有 $\Gamma(x_1) \subset \Gamma(x_2)$；

Theorem 6：满足 *A3,4,5,6* 假设，值函数 $V(x)$ 是单调递增的。

假设：*A7*：$F(x,y)$ 是严格凹函数（目标函数是凹的）；*A8*：Γ 是凸函数（约束条件是凸集合），即对于任意 $x_1,x_2\in X, y_1\in\Gamma(x_1), y_2\in\Gamma(x_2)$，则对于任意 $\lambda\in[0,1]$，则有 $\lambda y_1+(1-\lambda)y_2\in\Gamma(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$；

Theorem 7：满足 *A3,4,7,8* 假设，值函数 $V(x)$ 是严格凹函数。

假设：*A9*：$F(x,y)$ 是连续可微的；

Theorem 8：满足 *A3,4,9* 假设，值函数 $V(x)$ 在内部是连续可微的，根据包络引理可知

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x}=\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}|_{y=G(x)}$$

其中 $y=G(x)$ 表示 *FE* 的最优解。

5.6 *Other Topics*

假定 β 是时变的，则值函数表示为

$$V(0,x_0)=max\sum_t \Pi_{i=0}^{t}\beta_i r(x_t,u_t),\ x_{t+1}=g(x_t,u_t)$$
$$V(1,x_1)=max\sum_t \Pi_{i=0}^{t-1}\beta_i r(x_t,u_t),\ x_{t+1}=g(x_t,u_t)$$

相应的值函数迭代方程表示为

$$V(t,x_t)=max\{r(x_t,u_t)+\beta_0 V(t_1,x_{t+1})\}$$

其中值函数 V 与时刻 t 相关，不再能简单的给出 V 的表达式，每时每刻值函数 V 都在变化。现实中一种简化形式是 *quasi-hyperbolic* 形式的问题，即存在不同时段不同的 β。

6 *Reference*

龚六堂，苗建军，2014：《动态经济学方法（第二版）》，北京：北京大学出版社.

Kamien M. and Schwartz, Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management. New York: North Holland. 1981.

Stokey, N., R. E. Lucas Jr, and E. C. Prescott, 1989, Recursive Methods in Economic Dynamics. MIT Press.

Romer D., Advanced Macroeconomics.The McGraw-Hill Companies, Inc. 1996.

Turnovsky S., Methods of Macroeconomic Dynamics. MIT Press. 2000.

Sargent T., Recursive Macroeconomic Theory. MIT Press. 2002.

Stokey, N. The Economics of Inaction: Stochastic Control Models with Fixed Costs. Princeton University Press. Princeton and Oxford.

Berge, C., Topological Spaces, New York: MacMillan. 1963.

Rockefellar, T. Convex Analysis. Princenton University Press. 1970.

Varian H. Computational Economics and Finance: Modeling and Analysis with Mathematica. Springer-Verlag. 1996.